This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

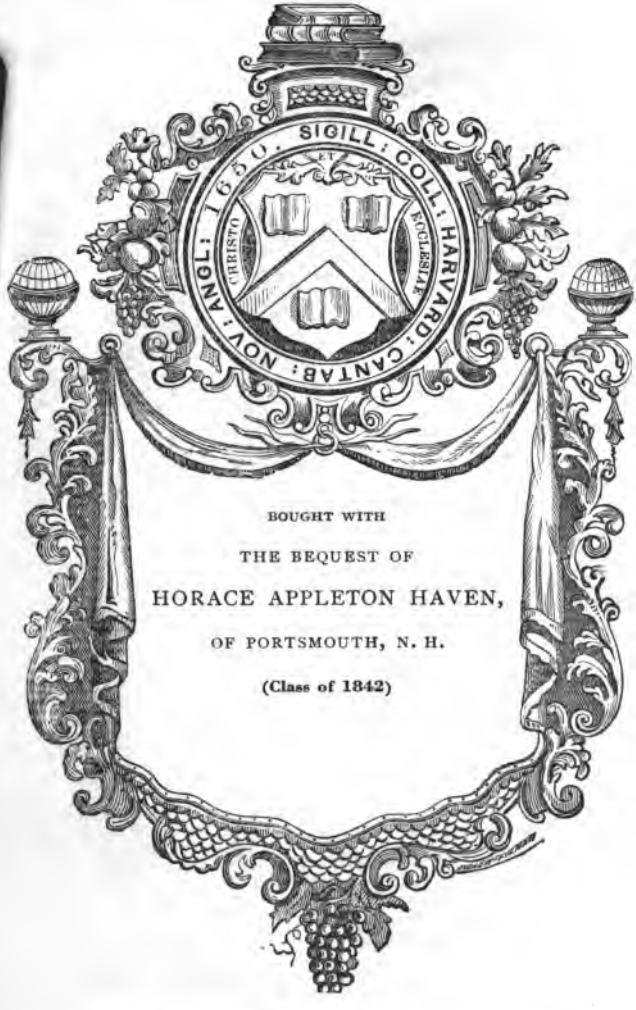
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3028.36



BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842)

SCIENCE CENTER LIBRARY

Anwendungen

des

höhern Calcüls

auf

geometrische und mechanische, insbesondere auf ballistische Aufgaben

von

Daniel Christian Ludwig.

Dr. D. C. L. Lehmus.

Professor der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem Haupt-Bergwerks-Eleven-Institut in Berlin.

Nebst 2 Figurentafeln.

Leipzig,

bei Friedrich Volckmar.

1836.

Math 3028.36

HARVARD COLLEGE LIBRARY
1851 Dec 2
Bowen Fund

Jacob H. Loeb
1907

Anwendungen
des
höhern Calcüls.

Vorrede.

Nach der, vor 3 Jahren erfolgten neuen Einrichtung der hiesigen königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule, ist dem Verfasser, außer seinem Vortrag über die Elementar-Lehren der statischen und mechanischen Wissenschaften, nach dem eingeführten 3ten Bande seines: Lehrbuchs der reinen und angewandten Mathematik: Berlin, 1827, auch im neuen dritten Coetus, der Vortrag der höhern Analysis und Curvenlehre, nach seinen: Grundlehren der höhern Mathematik und der mechanischen Wissenschaften, Berlin 1831. übertragen, mit der Bestimmung: die letzten drei Monate zu Anwendungen des höhern Calcüls auf statische und mechanische, insbesondere ballistische Aufgaben, zu verwenden. Diese Bestimmung ist die Veranlassung der Herausgabe dieser Aufgaben-Sammlung. Nur Anleitungen zur Uebung der Lehren des höhern Calcüls, nicht wissenschaftliche Begründung desselben ist in einer Sammlung von Aufgaben zu erwarten; wer diese sucht, der studiere: Ohms System der Mathematik, und seine Mechanik, deren erster Band zu-

gleich mit diesen Bogen erscheinen wird. Wenn einige in früheren Lehr-Büchern des Verfassers, schon gelöste Aufgaben sich hier wiederholen, so liegt dieß in dem Zwecke dieser Sammlung, auch wird eine einfachere bequemere Behandlung zu bemerken sein, so wie manche neue, wohl hier zuerst gegebene und aufgelöste Aufgabe. In der Ballistik wurde Hutton's Abhandlung über dieselbe, benutzt.

Berlin, im September 1835.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung §. 1 bis 4.

Ueber den Begriff: unendlich klein. . . . . §. 1.
Begründung einiger Formeln
a) für geometrische Bestimmungen. . . . . §. 2.
b) für Schwerpunctsbestimmungen. . . . . §. 3.
c) für ungleichförmige Bewegungen. . . . . §. 4.

Aufgaben I. bis XXXII.

Die Curve zu bestimmen, für welche jede Ordinate mittlere Proportionale ist, zwischen der zugehörigen Bogenlänge und einer Constante . . . . . I.
Bestimmung der Curve, deren Umdrehungsfläche in einem bestimmten Verhältniß zum Cylindermantel steht. . . . . II.
Ermittlung der Curve, deren Tangente die Schenkel eines gegebenen Winkels nach einer indirecten Proportion theilen. . . . . III.
Herleitung der Gleichung für die Laufcurve. . . . . IV.
Bestimmung des Inhalts der windschiefen Fläche. . . . . V.
Untersuchungen, wenn eine Kugel in einen Kegel, der eine Flüssigkeit enthält, eingesenkt wird. . . . . VI.
Die Curve der kleinsten Umdrehungsfläche zu finden. . . . . VII.
Bestimmung der Gleichung derjenigen Curve, für welche die Abscisse oder auch Ordinate des Schwerpuncts vom Bogen, der Ebene, der Umdrehungsoberfläche oder auch des Körpers, in einem bestimmten Verhältniß zur begrenzenden Abscisse oder auch Ordinate steht. . . . . VIII.
Aus der allgemeinen Gleichung für die Parabel verschiedene Bestimmungen abzuleiten. . . . . IX.
Der sphärischen Epicycloide Länge und Schwerpunct zu bestimmen. . . . . X.
Verschiedene Untersuchungen für diejenige Curve, deren Tangenten zwischen bestimmten Gränzen constant sind. . . . . XI.
Die Fläche eines Schraubengangs und den Schwerpunct zu bestimmen. . . . . XII.
Vom Gleichgewicht der Kräfte an einem Seil, um einen nicht drehbaren Cylinder. . . . . XIII.
Von der Gleichgewichtscurve. . . . . XIV.
Von der Kettenlinie. . . . . XV.
Ueber das Gleichgewicht eines Keils mit festen Wänden. . . . . XVI.
Geometrische und statische Bestimmungen bei der Cycloide. . . . . XVII.
Inhalt und Schwerpunct einer besondern windschiefen Fläche. . . . XVIII.
Inhalt und Schwerpunct des sphärischen Dreiecks . . . . . XIX.
Inhalts- und Schwerpuncts-Bestimmungen für's sphärische Zweieck. XX.
Dieselbe Aufgabe für den, durch das Projiciren der einen Ebene auf die andere, entstandenen Körper. . . . . XXI.
Dieselbe Aufgabe für kleinere Kreise. . . . . XXII.

Bestimmung der Stabilität eines schwimmenden paraboliſchen Körpers. . . . . XXIII.
Normaldruck des Waſſers und Mittelpunct deſſelben. . . . . XXIV.
Höhenmeſſungen durch's Barometer . . . . . XXV.
Vergleichung des Waſſerdrucks auf Ebenen verſchiedener Form . . XXVI.
Bewegung eines Atoms in einer Curve und Fliehkraft. . . . . XXVII.
Ueber den freien Fall durch große Höhen. . . . . XXVIII.
Bestimmung der Curve für die kürzeſte Zeit des Fallens. . . . . XXIX.
Waſſermengen-Bestimmungen. . . . . XXX.
Zeitbestimmungen beim Ausfluß des Waſſers. . . . . XXXI.
Bestimmung der Zeit des Uebergangs einer fliegenden Brücke. . . XXXII.

Aufgaben zur Balliſtik. §. 1 bis 48.

I. Theorie der Bewegung der Projectile im luftleeren Raum. §. 1 bis 9.
II. Theorie des Luftwiderſtandes. . . . . §. 10 bis 12
III. Theorie der Bewegung von Kugeln in der Luft. . . . §. 13 bis 43.
A) Ohne Berückſichtigung ihres Gewichts. . . . . §. 13 bis 15.
B) Mit Berückſichtigung deſſelben. . . . . §. 16 bis 43.
a) Für den lothrechten Fall. . . . . §. 16 bis 19.
b) Für das lothrechte Steigen. . . . . §. 20 bis 23.
c) Für ſchräge Richtungen. . . . . §. 24 bis 43.
α) Allgemeine Theorie. . . . . §. 24 bis 28.
β) Ausführung für nur kleine Elevationswinkel. . . . §. 29 bis 36.
γ) Ausführung für größere Elevationswinkel. . . . §. 37 bis 43.
IV. Von dem Uebergang einer bewegten Kugel aus einem Mittel in ein anderes, der theoretiſchen Beſtimmung der Anfangsgeſchwindigkeit der Kugel und des Rücklaufes des Geſchützes. §. 44 — 48.

Einleitung.

Zur Vermeidung des unbequemen Nachschlagens in Lehrbüchern, sollen hier die vorzüglichsten der gebrauchten Gesetze kurz erörtert werden.

§. 1. Ueber den Begriff: Unendlich klein.

1) Eine Zahl $= z$ heiße: unendlich klein, oder der Null zunächst anliegend, wenn sie keinen bestimmten, in Ziffern angebbaren Werth hat, also noch kleiner gedacht wird, als jede schon gedachte, noch so kleine Zahl.

2) Bezeichnen p, q, r, t u. s. w. beliebige Zahlen, nur nicht Null und unendlich groß, z aber eine unendlich kleine Zahl, so sind auch pz, qz^2; rz^3 u. s. w. unendlich klein, denn wollte man annehmen, pz wäre in Ziffern angebbar, eine, wenn auch äußerst kleine Zahl u, so wäre auch $z = \frac{u}{p}$ in Ziffern angebbar, welches der Voraussetzung entgegen ist.

3) Von zwei Zahlen a und b nennt man b unendlich klein in Vergleich mit a, oder a unendlich groß gegen b, wenn $\frac{b}{a}$ unendlich klein ist. So ist z. B., z unendlich klein gedacht, pz^2 unendlich klein in Vergleich mit rz; qz^6 unendlich klein gegen tz^5 u. s. w., woraus die Eintheilung des unendlich kleinen in Ordnungen entspringt.

4) Bezeichnen a, b, c u. s. w. endliche Zahlen, und ist

$$S = a + bz + cz^2 + \ldots\ldots$$

so wird, wenn z unendlich klein gedacht wird, $S = a$ sein, indem

die übrigen Glieder kleiner sind, als jede angebbare Zahl, d. h. für alle Rechnungen verschwinden.

5) Ist $y=\varphi_x$ und bezeichnen Δx, Δy zusammengehörige Aenderungen von x und y, so ist auch Taylor's Reihe

$$\varphi_{(x+\Delta x)} - \varphi_x \text{ oder } \Delta y = \Delta x \,.\, \partial y_x + \frac{\Delta x^2}{2} \,.\, \partial^2 y_x + \ldots.$$

also, wenn Δx und Δy unendlich klein gedacht, und durch dx und dy bezeichnet werden, im Allgemeinen

$$dy = dx \,.\, \partial y_x \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \partial y_x.$$

6) Bezeichnet P_x eine Function von x; ist $\partial P_x = y_x$ also $\partial^2 P_x = \partial y_x$; $\partial^3 P_x = {}^2\partial y_x$ u. s. w. und auch $P_x = \int y_x$; und wenn dies Integral zwischen den Grenzen a und b zu nehmen ist, (b > a gedacht), auch $\int_{b \div a} y_x = P_b - P_a$, und man setzt in der Taylorschen Reihe

$$P_{x+k} - P_x = k\partial P_x + \frac{k^2}{2}\partial^2 P_x + \frac{k^3}{(3)}\partial^3 P_x \ldots.$$

obige Ausdrücke nach y, und nach und nach für x die Werthe a, a+k, a+2k, ... a+(n−1)k; n so gedacht, daß a+nk=b wird, so entsteht

$$P_{a+k} - P_a = k \,.\, y_a + \frac{k^2}{2} \,.\, \partial y_a + \frac{k^3}{(3)}\partial^2 y_a \ldots.$$

$$P_{a+2k} - P_{a+k} = k \,.\, y_{a+k} + \frac{k^2}{2} \,.\, \partial y_{a+k} + \frac{k^3}{(3)}\partial^2 y_{a+k} \ldots.$$

$$P_{a+3k} - P_{a+2k} = k \,.\, y_{a+2k} + \frac{k^2}{2}\partial y_{a+2k} + \frac{k^3}{(3)}\partial^2 y_{a+2k} \ldots.$$

u. s. w.

$$P_{a+(n-1)k} - P_{a+(n-2)k} = k \,.\, y_{a+(n-2)k} + \frac{k^2}{2}\partial y_{a+(n-2)k} + \frac{k^3}{(3)} \,.\, \partial^2 y_{a+(n-2)k} \ldots.$$

$$P_b - P_{a+(n-1)k} = ky_{a+(n-1)k} + \frac{k^2}{2} \,.\, \partial y_{a+(n-1)k} + \frac{k^3}{(3)} \,.\, \partial^2 y_{a+(n-1)k} \ldots.$$

Folglich, wenn man addirt, und unter

$\Sigma[y_{a+(n-1)k}.k]$ die Summe der n erſten Glieder rechts, unter

$\frac{k}{2}.\Sigma[\partial y_{a+(n-1)k}.k]$ die Summe der n zweiten Glieder rechts,

u. ſ. w. verſteht

$$P_b - P_a = \Sigma[y_{b-k}.k] + \frac{k}{2}.\Sigma[\partial y_{b-k}.k] + \ldots.; \text{ oder}$$

$$\int_{b\div a} y_x = \Sigma[y_{b-k}.k] + k.\tfrac{1}{2}\Sigma[\partial y_{b-k}.k] + \ldots.$$

Denkt man ſich nun k unendlich klein, alſo n unendlich groß, und bezeichnet dieſen unendlich kleinen Zuwachs k von x durch dx (Differenz zweier unmittelbar aufeinander folgenden Werthe von x), ſo folgt aus der letzten Gleichung, wenn keines der Glieder die Form $\frac{1}{0}$, d. h. unendlich groß, annimmt:

$$\int_{b\div a} y_x = \Sigma[y_{b-dx}.dx] \text{ d. h.}$$

$$\int_{b\div a} y_x = y_a.dx + y_{a+dx}.dx + y_{a+2dx}.dx + \ldots. + y_{b-dx}.dx$$

oder wörtlich:

Es iſt $\int_{b\div a} y_x$ gleich der Summe aller unendlich vielen, unendlich kleinen, und unendlich wenig von einander verſchiedenen Producte, die alle durch $y_x.dx$ vorgeſtellt ſind, wenn man in y_x für x nach der Folge a, a+dx, a+2dx, u. ſ. w. bis a+(n−1)dx oder b−dx ſchreibt.

Dieſes Geſetz hat zu dem Integralzeichen $\int$ die Veranlaſſung gegeben, ſo daß dieſes $\int$ als ein Summirungszeichen angeſehen werden kann.

Gewöhnlich wird für $\int_{b\div a} y_x$ oder $\Sigma[y_{b-dx}.dx]$ die Darſtellung $\int_{b\div a} y.dx$ oder blos $\int_{b\div a} y.dx$ gebraucht, und wenn eine andere urvariable u eingeführt wird, ſo daß y einen Ausdruck

nach u bezeichnet, und a', b' die Werthe von u ausdrücken, die denen a, b von x entsprechen, so ist

$$\int_{b\div a} y\,dx = \int_{b'\div a'} y\,\partial x_u\,.\,du\,.\,(5);$$

§. 2. Begründung der Hauptformeln für geometrische Bestimmungen.

1) Für Rectificationen ebener Curven.

Sind x, y normale Coordinaten, v die Länge des zugehörigen Bogens zwischen x=a und x=b, so ist jedes Längen-Element $= dv = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $= \sqrt{dx^2 + \partial y_x{}^2\,dx^2}$

$= \sqrt{1+\partial y_x{}^2}\,.\,dx$ also $v = \Sigma\left[\left(\sqrt{1+\partial y_x{}^2}\right)_{b-dx}\,.\,dx\right]$ d. h.

I. $$v = \int_{b\div a} \sqrt{1+\partial y_x{}^2}\,.\,dx.$$

Sind die Coordinaten schief unter dem Winkel α, so entsteht eben so:

$dv = \sqrt{[d(y\sin\alpha)]^2 + [d(x-y\cos\alpha)]^2}$, also

$= \sqrt{[\partial(y\sin\alpha)_x\,.\,dx]^2 + [\partial(x-y\cos\alpha)_x\,.\,dx]^2}$, und

hieraus, wenn man die Ableitungen bildet, wie in I.

II. $$v = \int_{b\div a} \sqrt{1-2\cos\alpha\,.\,\partial y_x + \partial y_x{}^2}\,.\,dx.$$

Ist eine Polargleichung gegeben, und bezeichnet x den Winkel zum Radiusvector y, so entsteht das Element

$dv = \sqrt{[d(y\sin x)]^2 + [d(-y\cos x)]^2}$ und hieraus, wie oben:

III. $$v = \int \sqrt{y^2 + \partial y_x{}^2}\,.\,dx.$$

Anmerkung. Da es hiernach leicht erscheint aus der gefundenen Vorschrift bei normalen Coordinaten, die für schiefe abzuleiten, so sollen in den folgenden Bestimmungen immer nur erstere vorausgesetzt sein.

2) Für Rectificationen von Curven doppelter Krümmung. Bezeichnen x, y, z normale Coordinaten und v die zugehörige Bogenlänge zwischen den Grenzen x=a und x=b, so ist das Element dv als Diagonale eines normalen Parallelepipedums von

den Abmeſſungen dx, dy, dz, gleich $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, woraus dann

IV. $v=\int_{b\div a}\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}.dx$; oder auch, für jede beliebige urvariable u,

V. $v=\int_{b\div a}\sqrt{\partial x_u^{\,2}+\partial y_u^{\,2}+\partial z_u^{\,2}}.du$ folgt. (§. 1. 6,)

Iſt, wenn eine Polargleichung gegeben, der Durchſchnittspunct der 3 normalen Coordinatenachſen X, Y, Z der Pol, bezeichnet R den Radiusvector, φ den Winkel von R gegen X und θ den der Ebene RX gegen die XY, ſo iſt $x=R\,Cos\,\varphi$; $y=R\,Sin\,\varphi\,Cos\,\theta$; $z=R\,Sin\,\varphi\,Sin\,\theta$ und ſubſtituirt man dieſe Werthe, ſo entſteht

VI. $v=\int\sqrt{R^2\partial\varphi_\theta^{\,2}+\partial R_\theta^{\,2}+R^2\,Sin\,\varphi^2}.d\theta$; und hieraus, wen R conſtant iſt:

VII. $v=R\int\sqrt{Sin\,\varphi^2+\partial\varphi_\theta^{\,2}}.d\theta$.

3) Für Quadraturen von Ebenen.

Bezeichnet F den Inhalt einer Ebene beſtimmt durch die Gleichung y_x für normale Coordinaten, ſo iſt jedes Element $dF=y_x\,dx$; alſo $F=\Sigma[y_x.dx]$; oder

VIII. $F=\int y_x\,dx$ zwiſchen beſtimmten Grenzen.

Iſt eine Polar-Gleichung $R\varphi$ gegeben, worinnen R den Radiusvector und φ den Polar-Winkel bezeichnet, und wird $R=a$ wenn $\varphi=o$ iſt, ſo iſt der Inhalt F der von a, R und den zugehörigen Bogen v der Curve, begränzten Ebene $=\frac{1}{2}\int R^2.d\varphi$. Die Herleitung dieſer Formel ergiebt ſich entweder, wenn y die Normale aus dem Durchſchnittspunct von v und R auf a, und x die zugehörige Abſciſſe, aus dem Durchſchnittspunct von a und v auf a genommen, bezeichnet, aus

$$F=\tfrac{1}{2}R^2\,Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi+\int y\,dx$$

wenn $R\,Sin\,\varphi$ für y; $\partial x_\varphi\,d\varphi$ für dx und $a-R\,Cos\,\varphi$ für x geſchrieben wird, oder leichter aus folgender Anſicht: wächſt φ um $d\varphi$ ſo wird $dF=\frac{1}{2}R^2\,d\varphi$, alſo $F=\Sigma[\frac{1}{2}R^2.d\varphi]$ oder

IX. $F=\frac{1}{2}\int R^2.d\varphi$.

4) Für Quadraturen von Flächen.

Ist zwischen den normalen Coordinaten x, y, z eine Gleichung gegeben, bezeichnet F den Inhalt der Fläche, deren Projection auf XY gleich x.y ist, und bildet das Element $d^2F_{x,y}$ mit der Ebene x.y also auch mit der dx.dy den Winkel λ, so ist

$$d^2F_{x,y} \cdot \mathrm{Cos}\lambda = dx.dy.$$

Zur Bestimmung von Cosλ sei u der Winkel, welchen dx mit der Durchschnittslinie von $d^2F_{x,y}$ und dx.dy bildet, so folgt leicht, wenn man sich das normale schiefabgeschnittene vierseitige Prisma vorstellt, dessen Grundebene = dx.dy, dessen schiefe Schnittebene $= d^2F_{x,y}$; dessen eine Seitenkante im Endpunkt von z gleich o und dessen benachbarte Kanten $= dz_x$ und dz_y sind,

$$dx.\mathrm{Sin}u.\mathrm{Tg}\lambda = dz_x = \partial z_x .dx \text{ und}$$

$$dy\,\mathrm{Cos}u.\mathrm{Tg}\lambda = dz_y = \partial z_y .dy;$$ und eliminirt man u aus beiden Gleichungen, so entsteht

$$\mathrm{Cos}\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}}.$$

Wird dieser Werth substituirt, so folgt

$$d^2F_{x,y} = \sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}\,.dx.dy \text{ und hieraus}$$

$$\text{X. } F = \int\int \sqrt{1+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}}\,.dx.dy.$$

Ist der Winkel, welchen dx und dy einschließen, nicht ein rechter, sondern $= \gamma$, so sind die Gleichungen zu Bestimmung von λ folgende: $\mathrm{Sin}u\,.\mathrm{Tg}\lambda = \partial z_x$ und $\mathrm{Sin}(\gamma+u).\mathrm{Tg}\lambda = \partial z_y$ und aus beiden folgt

$$\mathrm{Cos}\lambda = \mathrm{Sin}\gamma : \sqrt{\mathrm{Sin}\gamma^2+\partial z_x^{\,2}+dz_y^{\,2}-2\mathrm{Cos}\gamma\,\partial z_x\,.\partial z_y}\,; \text{ und dann}$$

$$\text{XI. } F = \int\int \sqrt{\mathrm{Sin}\gamma^2+\partial z_x^{\,2}+\partial z_y^{\,2}-2\mathrm{Cos}\gamma\,\partial z_x\,.\partial z_y}\,.dx.dy.$$

Ist die Fläche F durch Umdrehung des zu x und y gehörigen Bogens v, um x erzeugt, so ist jedes Element $dF_x = 2\pi y dv$ und hieraus

XII. $F = \int \partial x \partial y \sqrt{1 + \partial y^2}$. dx.

Ist eine Polargleichung zwischen dem Radiusvector R, dem Winkel φ, welchen R mit der Achse X und dem θ, welchen die Ebene RX mit der XY bildet, gegeben, und wächst θ um $d\theta$, also R um dR_θ; φ um $d\varphi$, also R zugleich um dR_φ, folglich die zugehörige Oberfläche F um $d^2F_{\theta,\varphi}$, so ist die Projection von $d^2F_{\theta,\varphi}$ auf die Kugelfläche zum Halbmesser R, ein rechtwinklicht Parallelogram, dessen Seiten $= Rd\varphi$ und $R\,\mathrm{Sin}\varphi\,d\theta$ sind, und stellt man sich nun wieder das normale schiefabgeschnittene vierseitige Prisma vor, dessen Grundebene $= R^2\,\mathrm{Sin}\varphi\,d\varphi\,d\theta$, dessen schiefe Schnittebene $= d^2F_{\theta,\varphi}$, dessen eine Kante im Endpunct von x gleich o und dessen anliegenden Kanten $= dR_\theta$ und dR_φ sind, und bezeichnet den Winkel, welchen die Ebene $d^2F_{\theta,\varphi}$ mit $R^2\,\mathrm{Sin}\varphi\,d\varphi\,d\theta$ bildet, durch λ, und den, welchen beider Ebenen Durchschnittslinie mit $R\,\mathrm{Sin}\varphi\,d\theta$ einschließt, durch u, so hat man

$$R\,\mathrm{Sin}\varphi\,d\theta \,.\, \mathrm{Sin}\,u \,.\, \mathrm{tg}\,\lambda = dR_\theta = \partial R_\theta \,.\, d\theta \text{ und}$$

$$R \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{Cos}\,u \,.\, \mathrm{tg}\,\lambda = dR_\varphi = \partial R_\varphi \,.\, d\varphi.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\mathrm{Cos}\,\lambda = \frac{R\,\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{R^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2 + \partial R_\varphi{}^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2 + \partial R_\theta{}^2}}; \text{ und substituirt}$$

man diesen Werth in die Gleichung der Projectionslehre

$$\partial^2 F_{\theta,\varphi} \,.\, \mathrm{Cos}\,\lambda = R^2\,\mathrm{Sin}\varphi \,.\, d\varphi \,.\, d\theta, \text{ so entsteht:}$$

XIII. $F = \int\int R \,.\, \sqrt{R^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2 + \partial R_\varphi{}^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2 + \partial R_\theta{}^2} \,.\, d\varphi \,.\, d\theta;$

und hieraus, wenn R constant ist,

XIV. $F = R^2 \int^2 \mathrm{Sin}\varphi\,d\varphi\,d\theta.$

5) Für Cubaturen von Körpern.

Sind x, y, z die normalen Coordinaten, und bezeichnet z' einen veränderlichen Theil von z, so ist das Element im End-

punct von $z' = dx.dy.dz'$, also wenn K den Inhalt des von x, y und z' bestimmten Körpers ausdrückt,

$d^2K = dx.dy.dz'$; folglich

XV. $K = \int^{z_1}_{z} dx.dy.dz'$; oder auch, wenn die Grenzen von $z' = z$ und $= 0$ sind:

XVI. $K = \int^{z} z\,dx\,dy$.

Ist die, durch den Endpunct von x normal gelegte Durchschnittsebene des Körpers unmittelbar als Function von x auszudrücken, (wie z. B. bei Umdrehungskörpern) und bezeichnet p_x ihren Inhalt, so ist $dK = p_x.dx$; also

XVII. $K = \int p_x.dx$.

Ist eine Polargleichung zwischen R, φ, ϑ gegeben (R, φ, ϑ in der bisherigen Bedeutung verstanden) und bezeichnet R' einen veränderlichen Theil von R, so hat das körperliche Element im Endpunct von R', folgende drei Abmessungen R'.dφ, R'.Sinφ.dϑ und dR' und es ist daher

XVIII. $K = \int R'^2 \sin\varphi.d\varphi.d\vartheta.dR'$.

§. 3. Begründung der Hauptformeln für Schwerpuncts-Bestimmungen.

Bezeichnet für Curven einfacher Krümmung und für ebene Räume, in Beziehung auf die normalen Coordinaten-Achsen X, Y, immer v die Länge des Bogens, F den Inhalt der Ebene zu den Coordinaten x, y; und x_0, y_0 die Coordinaten des Schwerpuncts; für Curven von doppelter Krümmung aber, so wie für Flächen und Körper, in Beziehung auf die normalen Coordinaten-Achsen X, Y, Z, allemal v die Länge des Bogens, F den Inhalt der Fläche und K den Inhalt des Körpers zu den Coordinaten x, y, z, und x_0; y_0; z_0 die Coordinaten des Schwerpuncts, so hat man:

1) Für Curven einfacher Krümmung;

$v.x_0 = \Sigma[x.dv]$ und $v.y_0 = \Sigma[y.dv]$ also

I. $v.x_0 = \int^{x} x\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}.dx$

II. $v.y_0 = \int^{x} y\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}.dx$

2) Für Ebenen.

$F.x_0 = \Sigma[x.y\,dx]$ und $F.y_0 = \Sigma[\frac{1}{2}y.y\,dx]$, also

III. $F.x_0 = \int xy\,dx$;

IV. $F.y_0 = \frac{1}{2}\int y^2\,dx$.

3) Für Curven doppelter Krümmung;

Wie in 1. und 2. erhält man

V. $F.x_0 = \int x\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}.dx$

VI. $F.y_0 = \int y\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}.dx$

VII. $F.z_0 = \int z\sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}.dx$

4) Für Flächen.

Auch hier ergiebt sich auf dieselbe Weise

VIII. $F.x_0 = \int^2 x\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.dx.dy$

IX. $F.y_0 = \int^2 y\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.dx.dy$

X. $F.z_0 = \int^2 z.\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.dx.dy.$

5) Für Körper.

Auch hier entsteht, wie bisher, wenn x' einen veränderlichen Theil von x ausdrückt

XI. $K.x_0 = \int^3 x'.dx\,dy\,dz'$

XII. $K.y_0 = \int^3 y.dx\,dy\,dz'$ und

XIII. $K.z_0 = \int^3 z'.dx\,dy\,dz'$, und für Umdrehungs-Körper um x, blos

XIV. $K.x_0 = \int x.y^2\pi.dx.$

Anmerk. Für Polargleichungen sind die Formeln eben so einfach bestimmbar.

§. 4. Herleitung der Hauptformeln für ungleichförmige Bewegungen.

1) Für beschleunigte, wenn die Kraft nach der Richtung der Bewegung mitwirkt.

Ist in der Zeit t der Weg s zurückgelegt, und die Geschwindigkeit c erlangt, und bezeichnet G die Beschleunigung im letzten

Augenblick von t, also in der unendlichen kleinen Zeit dt, so ist der Geschwindigkeitszuwachs do in dieser Zeit $= 2G\,dt$, und aus $do = 2G\,dt$ folgt:

I. $\partial o_t = 2G$; folglich $o = \int 2G\,dt$.

Ferner ist $S = \Sigma[o.dt]$ und hieraus:

II. $\partial s_t = o$; also $s = \int o\,dt = \int\int 2G\,dt^2$.

2) Für verzögerte, wenn die Gegenwirkung mit der Richtung der Bewegung zusammenhält.

Bezeichnet hier ebenfalls G die Beschleunigung der entgegenwirkenden Kraft, im letzten Augenblick der Zeit t, o die Endgeschwindigkeit, und s den zurückgelegten Weg, so folgt wie in I.

III. $\partial o_t = -2G$ und

IV. $\partial s_t = o$.

3) Für beschleunigte, wenn die Kräfte in der Ebene der Bahn nach andern Richtungen mitwirken.

Wählt man in derselben Ebene, aus einem beliebigen Punct die normalen Coordinaten-Achsen X, Y, bezeichnet t die Zeit, in welcher der Endpunct der Ordinate y erreicht wird, o die erlangte Geschwindigkeit, s den zurückgelegten Weg, zerlegt dann sowohl o als die mitwirkenden Kräfte nach den Achsen der X und Y, bezeichnet die Beschleunigung nach der Richtung X durch G, und nach der Richtung Y durch G' und versteht unter z den Winkel, welchen die Tangente der Bahn im Endpunct von y, mit X bildet, so hat man, wie in 1.

$$\partial(o\,Cos z)_t = 2G;\ \partial(o\,Sin z)_t = 2G' \text{ und } \partial s_t = o.$$

Weil nun aber $tg\,z = \frac{\partial y}{\partial x}$ also $Cos z = \frac{\partial x}{\partial s}$

$$\frac{1}{\partial s_t . \partial t} = \frac{\partial x}{\partial s_t} = \frac{\partial x}{o} \text{ und}$$

$Sin z = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{o}$ ist, so entstehen, wenn diese Werthe substituirt werden, die 3 Gleichungen:

V. $\partial^2 x_t = 2G$

VI. $\partial^2 y_t = 2G'$

VII. $\partial s_t = o.$

4) Für verzögerte, wenn die Kräfte in der Ebene der Bahn nach andern Richtungen entgegen wirken.

Bei derselben Bedeutung der Zeichen wie in 3. ergiebt sich

VIII. $\partial^2 x_t = -2G$

IX. $\partial^2 y_t = -2G'$

X. $\partial s_t = o.$

Bemerkung. Es bezeichne durchaus: π die Verhältnißzahl 3,14159..., μ den Reibungscoefficienten, g die Beschleunigung der Schwere = 15 Fuß; γ das Gewicht eines Cubicfußes Wasser = 60 Pfund; alle Maßbestimmungen sind im Rheinländischen Fuß-Maaß zu verstehen, und der Winkel im Längenmaaß für den Halbmesser als Einheit genommen; e bezeichnet die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems.

Aufgabe

Es ist ein Punct P in der Entfernung PA = a von einer gegebenen Linie AB gegeben; man soll, wenn AB die Achse der Abscissen, A den Anfangspunct fixirt ist, und die normalen Ordinaten durch y ausgedrückt werden, die Curve durch P in der Ebene xy bestimmen, für welche, wenn s die Bogenlänge zu x und y und b eine constante Linie bezeichnet, sich $b : y = y : s$ verhält.

Es ist $s = \int \sqrt{1+\partial y_x^2}\,.\,dx$ oder $\partial s_x = \sqrt{1+\partial y_x^2}$ und es soll sein, $s = \frac{y^2}{b}$, daher muß $\partial\left(\frac{y^2}{b}\right)_x = \sqrt{1+\partial y_x^2}$ werden, woraus $\partial y_x = \frac{b}{\sqrt{4y^2-b^2}}$; also

$\partial x_y = \frac{1}{b}\cdot\sqrt{4y^2-b^2}$ folgt. Integrirt man nun nach y, so entsteht:

$$x = \frac{y\sqrt{4y^2-b^2}}{2b} - \frac{b}{4}\ln[2y+\sqrt{4y^2-b^2}] + C.$$

Weil nun die gesuchte Curve durch P gehen soll, so muß, für $x = 0$; $y = AP = a$ werden, aus welcher Bedingung

$C = -\frac{a\sqrt{4a^2-b^2}}{2b} + \frac{b}{4}(\ln 2a + \sqrt{4a^2-b^2})$ sich ergiebt.

Man hat also vollständig die Gleichung für die verlangte Curve:

$$x = \frac{y\sqrt{4y^2-b^2} - a\sqrt{4a^2-b^2}}{2b} - \frac{b}{4}\ln\frac{2y+\sqrt{4y^2-b^2}}{2a+\sqrt{4a^2-b^2}}$$

woraus erhellet, daß b nicht größer wie 2a sein kann.

Nimmt man $b = 2a$, so entsteht

$$x = \frac{y\sqrt{y^2-a^2}}{2a} - \frac{a}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}.$$

Aufgabe II.

Die Curven zu bestimmen, deren Umdrehungsfläche um die Abscissenachse, sich zum Cylinder-Mantel, derselben Peripherie der Grundebene und derselben Höhe zugehörig, wie 1 zu n verhält, und zwar für jeden Werth der Abscisse x.

Bezeichnet y jede normale Ordinate, so ist die Bedingungsgleichung:

1) $\int 2\pi y\sqrt{1+\partial y_x^2}.dx : 2\pi xy = 1:n$, oder, die Ableitung nach x gebildet

2) $ny.\sqrt{1+\partial y_x^2} = x\partial y_x + y.$

Bezeichnet nun z den Winkel jeder Tangente der gesuchten Curve mit x, so ist

3) $tgz = \partial y_x$ und diesen Werth in 2. gesetzt, giebt

4) $(n-Cosz)y = xSinz$. Bildet man nun, um eine der Veränderlichen zu eliminiren, die Ableitung von 4. nach x, substituirt ∂y_x aus 3, und y aus 4, so erhält man:

5) $\frac{\partial x_z}{x} = \frac{Cosz\,(nCosz-1)}{Sinz\,(n-Cosz)\,(n-2Cosz)}$ oder, Zähler und Nenner mit Sinz multiplicirt, und in Partialbrüche zerlegt,

6) $\frac{\partial x_z}{x} = +\frac{1}{2(n+2)}\cdot\frac{Sinz}{1+Cosz} + \frac{1}{2(n-2)}\frac{Sinz}{1-Cosz}$

$+\frac{Sinz}{n-Cosz} - \frac{2(n^2-2)}{n^2-4}\cdot\frac{Sihz}{n-2Cosz}$; also, integrirt,

7) $\ln x = -\frac{1}{2(n+2)}\ln(1+\cos z) + \frac{1}{2(n-2)}\ln(1-\cos z)$

$+\ln(n-\cos z) - \frac{n^2-2}{n^2-4}\ln(n-2\cos z) + \text{Const.}$ und hieraus

8) $x^{2(n^2-4)} = a^{2(n^2-4)}\,\frac{(n-\cos z)^{2(n^2-4)}\,(1-\cos z)^{n+2}}{(1+\cos z)^{n-2}\,(n-2\cos z)^{2(n^2-2)}}$

worinnen a eine willkührliche Const ist.

Aus der Gleichung 4, entspringt aber

9) $\cos z = \frac{ny^2 \pm x\sqrt{x^2-(n^2-1)y^2}}{y^2+x^2}$ und substituirt man diesen Werth in 8, so hat man die verlangte Coordinaten-Gleichung der gesuchten Curve.

Für $n=2$; wird 8 unbestimmt; in diesem Fall gehet aber aus 5, hervor

10) $\frac{\partial x_z}{x} = \frac{\sin z\cos z(2\cos z-1)}{2(1-\cos z)^2(1+\cos z)(2-\cos z)}$ und hieraus folgt:

11) $\frac{dx_z}{x} = \frac{\sin z}{8(1+\cos z)} - \frac{7\sin z}{8(1-\cos z)} + \frac{\sin z}{2-\cos z}$

$+\frac{\sin z}{4(1-\cos z)^2}$; also

12) $\ln x = -\frac{1}{8}\ln(1+\cos z) - \frac{7}{8}\ln(1-\cos z) + \ln(2-\cos z)$

$-\frac{1}{4(1-\cos z)} + C$ oder

13) $x^8 = \frac{a^8.(2-\cos z)^8}{(1+\cos z)(1-\cos z)^7.e^{\frac{2}{1-\cos z}}}$ in welche Gleichung aus 9,

14) $\cos z = \frac{2y^2 \pm x\sqrt{x^2-3y^2}}{y^2+x^2}$ zu substituiren ist.

Beispiel. Ist $n=1$, so liefern die 3 Gleichungen 4, 8, 9 folgende: $(1-\cos z)y = x\sin z$;

$x^6 = \frac{a^6(1-\cos z)^3}{(1+\cos z)(1-2\cos z)^2}$; $\cos z = \frac{y^2 \pm x^2}{y^2+x^2}$.

Das obere Zeichen in der letzten Gleichung gewählt, giebt die gerade Linie parallel mit x; für das untere Zeichen aber entsteht die Coordinaten-Gleichung:

$$y^3 - 3x^2 y + 2a^3 = 0.$$

Soll etwa $y = c$ werden, wenn $x = b$ ist, so ergiebt sich: $y^3 - 3x^2 y + 3b^2 c - a^3 = 0$, woraus erhellet, daß die Ordinate im Anfangspunct der Abscissen $= \sqrt[3]{c^3 - 3b^2 c}$ ist; also $c^2 > 3b^2$ sein muß, wenn dieselbe positiv werden soll.

Zusatz. Soll sich die Ebene $\int y dx$ zum Rechteck xy oder der Umdrehungskörper $\int y^2 \pi dx$ zum Cylinder $y^2 \pi x$ wie $1 : n$ verhalten, so ergiebt sich

im ersten Fall $y = ax^{n-1}$;

im zweiten Fall $y^2 = a.x^{n-1}$.

Aufgabe. III.

Es ist ein Winkel $A=\alpha$ (Fig. 1.) und auf den Schenkeln desselben die Stücke $AB=a$ und $AC=b$ gegeben; man soll zwischen den Puncten B und C die Curve bestimmen, für welche die Tangente jedes Punctes derselben, die Schenkel a und b in Theile abtheilt, welche eine indirecte Proportion bilden.

Bezeichnet c die Entfernung BC, β, γ die Winkel ABC, ACB; h die Höhe AG aus A auf BC; a', b' die Projectionen BG, CG von $AB=a$ und $AC=b$ auf $BC=c$; H die Mitte von BC; e die Transversale AH; δ den Winkel AHC; wird BC als Abscissenlinie gewählt, B als Anfangspunct, und bezeichnen x, y die normalen Coordinaten jedes Punctes D der gesuchten Curve, und z den Winkel der Tangente KF in D mit der Abscissenlinie, so hat man

1) $KI = y\,\mathrm{Cotg}\,z$; also

2) $KB = y\,\mathrm{Cotg}\,z - x$; folglich

3) $BE = \frac{BK\,.\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}(\beta - z)} = \frac{BK\,.\,\mathrm{tg}\,z}{\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\beta\,.\,\mathrm{tg}\,z}$; und daher auch

4) $AE = a - \frac{BK\,.\,\mathrm{tg}\,z}{\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{tg}\,z}$; also

5) $AF = \frac{AE\,\mathrm{Sin}(\beta - z)}{\mathrm{Sin}(\gamma + z)} = AE\,.\,\frac{\mathrm{Sin}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{tg}\,z}{\mathrm{Sin}\,\gamma + \mathrm{Cos}\,\gamma\,.\,\mathrm{tg}\,z}$.

Substituirt man nun diese Werthe in die, die Bedingung der Aufgabe ausdrückende Proportion,

6) $AE : EB = CF : AF$ oder

7) $a : EB = b : AF$, so entsteht

8) $$a \cdot \frac{\mathrm{Sin}\beta - \mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{tg}z}{\mathrm{Sin}\gamma + \mathrm{Cos}\gamma\,\mathrm{tg}z}\left[a - \frac{y - x\,\mathrm{tg}z}{\mathrm{Sin}\beta - \mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{tg}z}\right] = b \cdot \frac{y - x\,\mathrm{tg}z}{\mathrm{Sin}\beta - \mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{tg}z}$$

oder, nach $\mathrm{tg}z$ geordnet und h für $a\,\mathrm{Sin}\beta$ oder $b\sin\gamma$, a' für $a\,\mathrm{Cos}\beta$; b' für $b\,\mathrm{Cos}\gamma$ geschrieben:

9) $$[(a'-b')x - a'a']\,\mathrm{tg}z^2 - [2hx + (a'-b')y - 2a'h]\,\mathrm{tg}z + 2hy - h^2 = 0.$$

Da nun aber zu jedem Punct der gesuchten Curve nur eine Tangente gehören kann, so muß diese Gleichung 9) nur einen Werth für $\mathrm{tg}z$ liefern können, so daß also zwischen y und x folgende Relation statt finden muß:

10) $$[2hx + (a'-b')y - 2a'h]^2 = 4[(a'-b')x - a'a'][2hy - h^2];$$

oder geordnet und c für $a' + b'$ geschrieben,

11) $$(a'-b')^2 y^2 - 4h[(a'-b')x - a'c]y - 4h^2 x(c-x) = 0,$$

woraus erhellet, daß die gesuchte Curve eine Parabel ist.

Die Entwickelung liefert:

12) $$y = \frac{2h}{(a'-b')^2} \cdot \left[-a'c + (a'-b')x \pm c\sqrt{a'a' - (a'-b')x}\right]$$

und, weil für den in Rede stehenden Theil der Curve, sowohl für $x = 0$ als auch für $x = c$, sich $y = 0$ ergeben muß, so kann nur das obere Zeichen genommen werden, und man hat daher

13) $$y = \frac{2h}{(a'-b')^2} \cdot \left[-a'c + (a'-b')x + c\sqrt{a'a' - (a'-b')x}\right].$$

Zur Bestimmung des höchsten Punctes der gefundenen Curve über BC, oder des größten Werthes von y setze man:

$$dy^x = \mathrm{tg}z = \frac{2h}{a'-b'}\left[1 - \frac{c}{2\sqrt{a'a' - (a'-b')x}}\right]$$

gleich Null, so erhält man, wenn x' die der größten Ordinate y zugehörige Abscisse bezeichnet,

14) $$x' = \frac{3a' + b'}{4};$$

15) $y' = \frac{h}{2}$, welche Werthe ein Max. liefern, weil

16) $d^2y'_x = -\frac{h}{2c^2}$ sich ergiebt.

Weil nun, wenn M der Durchschnittspunct der Parabel und der Transversale AH = e ist, aus der Gleichung 11) oder 13), wenn $HM\,Sin\,\delta$ für y und $\frac{c}{2} + HM\,Cos\,\delta$ für x gesetzt wird und die Gleichungen $e\,Cos\,\delta + b' = \frac{c}{2}$ und $e\,Sin\,\delta = h$ benutzt werden, sich

17) $HM = \frac{e}{2}$; also die Ordinate zu $M = \frac{e}{2} Sin\,\delta = \frac{h}{2}$ und die zugehörige Abscisse $= \frac{c}{2} + \frac{e}{2} Cos\,\delta = \frac{a'+b'}{2} + \frac{c}{4} - \frac{b'}{2} = \frac{3a'+b'}{4}$ ergiebt, so folgt aus 14) und 15), daß M der höchste Punct der Parabel über BC, also MH ein Durchmesser derselben ist.

Nimmt man nun $MH = \frac{e}{2}$ als Abscissenlinie, M als Anfangspunct der Abscissen, und die Ordinaten parallel mit BC, so hat man, jene durch u, diese durch w ausgedrückt,

18) $x \pm w = \frac{c}{2} + (\frac{e}{2} - u)\,Cos\,\delta$ und

19) $y = (\frac{e}{2} - u)\,Sin\,\delta$, und werden hieraus die Werthe für x und y in die Gleichung 11) gesetzt, so erhält man aus ihr, weil $HG\,tg\,\delta = h$ oder

20) $\frac{a'-b'}{2} tg\,\delta = h$ ist,

21) $w^2 = \frac{c^2}{2e} \cdot u = \frac{(HC)^2}{MH} \cdot u$ wonach die Construction leicht auszuführen ist.

Will man auch noch den Achsenparameter p und den Abstand t zwischen dem Durchmesser MH und der Achse bestimmen, so setze man die zur Normale t aus M auf die Achse gehörige Abscisse auf der Achse, vom Scheitelpuncte derselben herein gemessen, = r,

Aufgabe IV.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ACE $= \alpha$, aus einem gegebenen Puncte A des einen Schenkels, die Curve zu construiren, für welche das Verhältniß jedes Bogens AB $= v$ derselben, zu dem Stück CF $= w$ des andern Schenkels, abgeschnitten durch die Tangente in B, unveränderlich $= n$ ist. (Fig. 2.)

Wird AC als Abscissen-Achse gewählt, A als Anfangspunct, die Ordinaten y parallel CE genommen, bezeichnet zu den Coordinaten x, y dann z den Winkel der Tangente im Endpunct von y mit AC, und a die constante Länge AC, so ist

1) $\frac{v}{w} = n$;

2) $w = y + \frac{(a-x)\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)}$; ferner in dem Dreieck, dessen Seiten die unendlich kleinen Aenderungen dx, dy, dv sind,

3) $dx.\mathrm{Sin}\,\alpha = dv\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)$ und

4) $dx\,\mathrm{Sin}\,z = dy\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)$.

Bildet man nun die Ableitung von 2) nach x und substituirt aus 4) $\frac{\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)}$ für ∂y_x, so entsteht

5) $\partial w_x = \frac{(a-x)\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)^2}.\partial z_x$ und diese Gleichung mit 1) verbunden, und aus 3) $\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)}$ für ∂v_x geschrieben, liefert

6) $\frac{1}{a-x} = n \cdot \frac{\partial z}{\sin(\alpha+z)}$, wozu die Integral-Gleichung

7) $-\ln(a-x) = n \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha+z}{2} + \text{Const}$ ist.

Weil nun x, y, v, w und z zugleich verschwinden, so entsteht $\text{Const} = -\ln a - n \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ und daher vollständig

8) $(a-x)\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha+z}{2}\right]^n = a\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]^n$; oder

$\operatorname{tg}\frac{\alpha+z}{2}$ durch p und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ durch b ausgedrückt

9) $(a-x)p^n = a \cdot b^n$.

Um nun auch y durch z oder p auszudrücken, so folgt aus 4)

10) $\partial y_x = \frac{\sin z}{\sin(\alpha+z)} = \frac{\sin[\alpha+z-\alpha]}{\sin(\alpha+z)} = \cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{Cotg}(\alpha+z)$

$= \cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{Cotg} 2 \cdot \frac{\alpha+z}{2}$

$= \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \frac{1-p^2}{2p}$; und also,

$\partial y_p \cdot \partial p_x$ oder $\frac{\partial y_p}{\partial x_p}$ für ∂y_x geschrieben,

11) $\partial y_p = \left[\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \frac{1-p^2}{2p}\right] \partial x_p$.

Aus 9) ist aber die Ableitung nach p;

12) $(a-x)np^{n-1} - p^n \cdot \partial x_p = 0$ und wird hieraus und aus 9) x eliminirt, so entsteht

13) $\partial x_p = \frac{nab^n}{p^{n+1}}$; also

Aufgabe IV.

Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels $ACE = \alpha$, aus einem gegebenen Puncte A des einen Schenkels, die Curve zu construiren, für welche das Verhältniß des Bogens $AB = v$ derselben, zu dem Stück $CF = w$ des andern Schenkels, abgeschnitten durch die Tangente in B, unveränderlich $= n$ ist. (Fig. 2.)

Wird AC als Abscissen-Achse gewählt, A als Anfangspunct, die Ordinaten y parallel CE genommen, bezeichnet zu den Coordinaten x, y dann z den Winkel der Tangente im Endpunct von y mit AC, und a die constante Länge AC, so ist

1) $\frac{v}{w} = n$;

2) $w = y + \frac{(a-x)\,\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)}$; ferner in dem Dreieck, dessen Seiten die unendlich kleinen Aenderungen dx, dy, dv sind,

3) $dx \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha = dv\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)$ und

4) $dx\,\mathrm{Sin}\,z = dy\,\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)$.

Bildet man nun die Ableitung von 2) nach x und substituirt aus 4) $\frac{\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)}$ für ∂y_x, so entsteht

5) $\partial w_x = \frac{(a-x)\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)^2} \cdot \partial z_x$ und diese Gleichung mit 1) verbunden, und aus 3) $\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,(\alpha+z)}$ für ∂v_x geschrieben, liefert

6) $\frac{1}{a-x} = n \cdot \frac{\partial z_x}{\mathrm{Sin}(\alpha+z)}$, wozu die Integral-Gleichung

7) $-\ln(a-x) = n \ln \mathrm{tg} \frac{\alpha+z}{2} + \mathrm{Const}$ ist.

Weil nun x, y, v, w und z zugleich verschwinden, so entsteht $\mathrm{Const} = -\ln a - n \ln \mathrm{tg} \frac{\alpha}{2}$ und daher vollständig

8) $(a-x)\left[\mathrm{tg}\frac{\alpha+z}{2}\right]^n = a\left[\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right]^n$; oder

$\mathrm{tg}\frac{\alpha+z}{2}$ durch p und $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ durch b ausgedrückt

9) $(a-x)p^n = a \cdot b^n$.

Und nun auch y durch z oder p auszudrücken, so folgt aus 4)

10) $\partial y_x = \frac{\mathrm{Sin}\, z}{\mathrm{Sin}(\alpha+z)} = \frac{\mathrm{Sin}[\alpha+z-\alpha]}{\mathrm{Sin}(\alpha+z)} = \mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Sin}\alpha \mathrm{Cotg}(\alpha+z)$

$= \mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Sin}\alpha\, \mathrm{Cotg}\, 2 \cdot \frac{\alpha+z}{2}$

$= \mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Sin}\alpha \cdot \frac{1-p^2}{2p}$; und also,

$\partial y_p \cdot \partial p_x$ oder $\frac{\partial y_p}{\partial x_p}$ für ∂y_x geschrieben,

11) $\partial y_p = \left[\mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Sin}\alpha \cdot \frac{1-p^2}{2p}\right] \partial x_p$.

Aus 9) ist aber die Ableitung nach p;

12) $(a-x)np^{n-1} - p^n \cdot \partial x_p = 0$ und wird hieraus und aus 9) x eliminirt, so entsteht

13) $\partial x_p = \frac{n a b^n}{p^{n+1}}$; also

14) $\delta y_p = \varepsilon\left[\operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Sin}\alpha \cdot \frac{1-p^2}{2p}\right] \cdot \frac{n a b^n}{p^{n+1}}$.

Die Integration dieser Gleichung liefert

15) $y = -\frac{a b^n \operatorname{Cos}\alpha}{p^n} + \frac{n a b^n \operatorname{Sin}\alpha}{2(n+1)p^{n+1}} - \frac{n a b^n \operatorname{Sin}\alpha}{2(n-1)p^{n-1}} + \text{Const.}$

Für $y = o$ wird $p = b$, also

16) $\text{Const} = a\left[\frac{\operatorname{Cos}\frac{\alpha^2}{2}}{n+1} + \frac{\operatorname{Sin}\frac{\alpha^2}{2}}{n-1}\right]$.

Wird dieser Werth und zugleich der für p aus 9) in 15) gesetzt, so folgt die verlangte Coordinaten-Gleichung:

17) $y = a\left[-\frac{a-x}{a}\operatorname{Cos}\phi + \left[1 - n\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha^2}{n-1}\right.$

$\left. + \left[1 + n\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha^2}{n+1}\right]$.

Für $x = a$ erhält man hieraus

18) $CE = a\left[\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha^2}{n+1} + \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha^2}{n-1}\right]$.

Beispiele 1. Ist $\alpha = 90°$, so wird

$$CE = \frac{n a}{n^2-1}.$$

2. Ist $\alpha = 180°$, so wird

$$CE = \frac{a}{n-1},$$

welches Resultat die unmittelbare Auflösung für diesen Fall augenblicklich ergiebt.

3. Ist $n = 1$, so entsteht

$$y = \frac{x^2}{2a}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \left[a - x - a\ln\frac{a-x}{a}\right]\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

und CE wird Asymptote dieser Curve.

4. Ist $n = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 90°$, so folgt

$$y = \frac{x^2}{4a} + \frac{1}{2}\left[a - x - a\ln\frac{a-x}{a}\right].$$

Anmerkung. Man kann diese krumme Linie, die Laufcurve nennen, insofern der Punct A sie dann beschreibt, wenn er sich gleichförmig so fortbewegt, daß er immer die Richtung nach einem aus C abgegangenen, sich nach der Richtung CE gleichförmig fortbewegenden Punct beibehält, und sich demselben zu nähern sucht.

Aufgabe V.

Die gegenseitige Lage zweier begrenzter geraden Linien AB, CD im Raum sei gegeben, und jeder Punct E in AB mit demjenigen G in CD, für welchen sich AE:AB = CG:CD verhält, durch eine gerade Linie EG verbunden, so daß also alle so construirte Linien von AC bis BD eine windschiefe Fläche ABCD bilden. Den Inhalt F dieser Fläche zu bestimmen.

Durch AB und den einen Endpunct C der zweiten Linie CD sei eine Ebene gelegt, und darauf D in D′ und G in G′ normal projicirt (Fig. 3.). Wird nun AE = x gesetzt, so ist der Winkel AEG′ = φ durch die Form der Projection AEG′C als Function von x auszudrücken, und bezeichnet dann y jeden veränderlichen Theil von EG′ und z die zugehörige mit D′D parallele, also normale Ordinate bis in EG, so hat man [vid. Einleitung §. 2. (XI.)]

$$F = \int^{2} \sqrt{\mathrm{Sin}\varphi^{2} + \partial z_x^{\,2} + \partial z_y^{\,2} + 2\,\mathrm{Cos}\varphi\,.\,\partial z_x\,.\,\partial z_y}\,.\,dy\,.\,dx$$

zuerst nach y zwischen EG′ und o, und dann nach x zwischen AB und o zu integriren. Die Abhängigkeit des φ von x aus der Gleichung AE:AB = CG′:CD′ so wie die Länge EG′, als Function von x und die Gleichung zwischen z, x und y erscheinen aber in so zusammengesetzter Form, daß eine wirkliche allgemeine Ausführung der Integration in endlicher Gestalt nicht zu erwarten ist, weshalb hier nur einige besondere integrable Fälle durchgeführt werden sollen.

1ter besonderer Fall.

Es sei $\angle DCD' = 90°$; $\angle CAB = 180°$; $DC = b$; $CA = c$; $AB = a$, also $y = o$; und aus der Proportion $y : z = x + c : \frac{x}{a} . b$; $z = \frac{bxy}{a(c+x)}$, folglich

$$F = \int^2 (\partial z_x + \partial z_y)\, dy\, dx, \text{ woraus sehr leicht}$$

$$F = \frac{b(a+c)}{2}$$

sich ergiebt, wie erforderlich, da in diesem Fall ABCD in die Dreiecks-Ebene BCD übergeht.

2ter besonderer Fall.

Es treffe D' den Punct B; (Fig. 4.) und $\angle CAB$ sei $= 90°$; AB sei $= a$; $AC = c$; $DD' = b$, so folgt aus $AE : AB = CG : CD = CG' : CB$, daß auch $\angle ABC = 90°$ ist; ferner ergiebt sich leicht $z = \frac{hxy}{c(a-x)}$, und folglich ist

$$1) F = \int \sqrt{1 + \frac{h^2 x^2}{c^2 (a-x)^2} + \frac{a^2 h^2 y^2}{c^2 (a-x)^4}}\, dy\, dx$$

$$= \int \frac{dx}{c(a-x)^2} \int \sqrt{c^2 (a-x)^4 + h^2 x^2 (a-x)^2 + a^2 h^2 y^2}\, dy$$

$$= \int \frac{dx}{2c(a-x)^2} \left[y \sqrt{c^2 (a-x)^4 + h^2 x^2 . (a-x)^2 + a^2 h^2 y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2 (a-x)^4 + h^2 x^2 (a-x)^2}{ah} \times \right.$$

$$\ln \left[ahy + \sqrt{b^2 (a-x)^4 + h^2 x^2 (a-x)^2 + a^2 h^2 y^2} \right] +$$

also zwischen den Grenzen $y = \frac{c(a-x)}{a}$ und $y = o$ genommen, wenn P den Ausdruck $a^2 c^2 - 2ac^2 x + (c^2 + h^2) x^2$ bezeichnet,

$$2) F = \frac{1}{2ach} \left[ch \int \sqrt{c^2 h^2 + P}\, . dx + \int P . \ln \frac{ch + \sqrt{c^2 h^2 + P}}{\sqrt{P}}\, dx \right].$$

Es ist aber, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = o$, wenn $BC = \sqrt{a^2 + c^2}$ durch A, $AD = \sqrt{a^2 + h^2}$ durch B, $\sqrt{c^2 + h^2}$ durch C; $CD = \sqrt{a^2 + c^2 + h^2}$ durch D ausgedrückt wird,

3) $\int \sqrt{c^2h^2+P}\,.\,dx = a.\frac{h^2.A+c^2.B}{2C^2}$

$$+\frac{c^2h^2.D^2}{2.C^3}\ln\frac{h[ah+AC]}{c[-ac+BC]}.$$

Ferner ist, theilweis integrirt

4) $T=\int P\ln\frac{ch+\sqrt{c^2h^2+P}}{\sqrt{P}}dx =$

$$[\int P\,dx]\ln\frac{ch+\sqrt{c^2h^2+P}}{\sqrt{P}}$$

$$+\frac{ch}{2}\int[\int P\,dx]\sqrt{c^2h^2+P}.\frac{1}{P(c^2h^2+P)}.\partial P_x.dx,$$

worinnen $\int P\,dx = a^2c^2x - ac^3x^2 + \frac{1}{3}(c^3+h^2)x^3$

und $\frac{[\int P\,dx]\partial P_x}{P[c^2h^2+P]} = \frac{2x}{3h^2}\left[a^2.\frac{-ac^3+(c^2+2h^2)x}{P}\right.$

$$\left.+\frac{ac^2(a^2-2h^2)+[h^2(c^2+h^2)-a^2(c^2+2h^2)]x}{c^2h^2+P}\right] \text{ ist,}$$

so daß also

4) $T=[\int P\,dx]\ln\frac{ch+\sqrt{c^2h^2+P}}{\sqrt{P}}$

$$+\frac{x^2c}{3h}\int\frac{-ac^2x+(c^2+2h^2)x^2}{P}\sqrt{c^2h^2+P}.dx$$

$$+\frac{c}{3h}\int\frac{ac^2(a^2-2h^2)x+[(c^2+h^2)h^2-a^2(c^2+2h^2)]x^2}{\sqrt{c^2h^2+P}}.dx \text{ wird.}$$

Für das 2te dieser 3 Glieder entsteht,

5) $u = x - \frac{ac^2}{c^2+h^2}$

6) $c^2h^2(a^2+c^2+h^2)+(c^2+h^2)^2u^2 = U$, und

7) $a^2c^2h^2+(c^2+h^2)^2u^2 = U'$ gesetzt,

8) $L=\frac{a^2c}{3h}\int\frac{-ac^2x+(c^2+2h^2)x^2}{P}.\sqrt{c^2h^2+P}.dx$

$=\frac{a^2c(c^2+2h^2)C}{3h}\int\frac{u^2.\sqrt{U}}{U'}du$

$+\frac{a^3c^3(c^2+3h^2)}{3hC}\int\frac{u\sqrt{U}}{U'}du+\frac{a^4c^4h}{3C^3}\int\frac{\sqrt{U}}{U'}du$

und hieraus, (Meier Hirsch Integraltafeln p. 216 und 217) da

9) $\int\frac{u^2\sqrt{U}}{U'}du=\int\frac{u^2}{\sqrt{U}}du+\frac{c^2h^2}{C^2}\int\frac{1}{\sqrt{U}}du-\frac{a^2c^4h^4}{C^2}\int\frac{1}{U'\sqrt{U}}du;$

10) $\int\frac{u\sqrt{U}}{U'}du=\int\frac{u}{\sqrt{U}}du+c^2h^2C^2\int\frac{u}{U'.\sqrt{U}}du;$

11) $\int\frac{\sqrt{U}}{U'}du=\int\frac{1}{\sqrt{U}}du+c^2h^2C^2\int\frac{1}{U'.\sqrt{U}}du;$

12) $\int\frac{u}{U'\sqrt{U}}du=\frac{1}{chC^2}\ln\frac{\sqrt{U}-chC}{\sqrt{U'}}$; und

13) $\int\frac{1}{U'.\sqrt{U}}du=\frac{1}{ac^2h^2C^3}\text{Arctg}\frac{C^2u}{a\sqrt{U}}$ ist, wenn man substituirt,

14) $L=\frac{a^2c[c^2+2h^2]C}{3h}\int\frac{u^2}{\sqrt{U}}du+\frac{a^3c^3(c^2+3h^2)}{3hC}\int\frac{u}{\sqrt{U}}du$

$+\frac{a^2c^3h[2h^2C^2+c^2D^2]}{3C^3}\int\frac{1}{\sqrt{U}}du$

$+\frac{a^3c^4(c^2+3h^2)}{3C^4}\ln\frac{\sqrt{U}-chC}{\sqrt{U'}}-\frac{2a^3c^3h^3}{3C^4}\text{Arctg}\frac{C^2u}{a\sqrt{U}}.$

Bei derselben Zeichensprache entsteht für das 3te Glied M in 4)

15) $M=\frac{cC[C^2h^2-a^2c^2-2a^2h^2]}{3h}\int\frac{u^2}{\sqrt{U}}du$

$-\frac{a^3c^3(c^2+3h^2)}{3hC}\int\frac{u}{\sqrt{U}}du-\frac{a^2.c^4hD^2}{3.C^3}\int\frac{1}{\sqrt{U}}du$; und es ist demnach

$$16)\ L+M=\frac{chC^3}{3}\int\frac{u^3}{\sqrt{U}}du+\frac{2a^2c^3h^3}{3C}\int\frac{1}{\sqrt{U}}du$$

$$+\frac{a^3c^4[c^2+3h^2]}{3C^4}\ln\frac{\sqrt{U}-chC}{\sqrt{U'}}-\frac{2a^3c^3h^3}{3C^4}\operatorname{Arctg}\frac{C^3u}{a\sqrt{U}}\ ;\ \text{oder}$$

$$17)\ L+M=\frac{ch}{6C}u\sqrt{U}+\frac{(3a^2-c^2+h^2)c^3h^3}{8C^3}\ln[C^2u+\sqrt{U}]$$

$$+\frac{a^3c^4(c^2+8h^2)}{3C^3}\ln\frac{\sqrt{U}-chC}{\sqrt{U'}}-\frac{2a^3c^3h^3}{3C^4}\operatorname{Arctg}\frac{C^3u}{a\sqrt{U}}.$$

Substituirt man nun diesen Werth in 4), nimmt das Resultat zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=o$; oder zwischen $u=\frac{ah^2}{C^2}$ und $u=\frac{ac^2}{C^2}$; setzt also im Minuend, für U, U', P und $\int P\,dx$ die Werthe $h^2A^2C^2$, $a^2h^2C^2$, a^2h^2 und $\frac{a^3C^2}{3}$ und im Subtrahend die $c^2B^2C^2$, $a^2c^2C^2$, a^2c^2 und o; und addirt dann aus 3) so giebt die Formel 2) folgendes Resultat:

$$18)\ F=\frac{Ah^3+Bc^3}{3C^2}+\frac{a^2C^2}{6ch}\ln\frac{A+c}{a}$$

$$+\frac{c^2h^2[3a^2+C^2]}{6aC^3}\ln\frac{(AC+ah)h}{(BC-ac)c}$$

$$+\frac{a^2c^3[c^2+3h^2]}{6hC^4}\ln\frac{A-c}{B-h}-\frac{a^2c^2h^2}{3C^4}\operatorname{Arctg}\frac{Ac+Bh}{AB-ch}.$$

Beispiel. Ist $c=h=a$; so folgt aus dieser Formel

$$F=\frac{a^2}{24}[8\sqrt{2}+8\ln(1+\sqrt{2})+5\sqrt{2}\ln 3-2\operatorname{Arctg}2\sqrt{2}]$$

$$=0{,}986\ldots.a^2.$$

3ter besonderer Fall.

Es sei die Projection ABCD' ein rechtwinkliches Parallelogramm, $AB=a$; $AC=b$, $DD'=h$, so ist φ constant $=90°$, und wird $\frac{ab}{h}$ durch c ausgedrückt, so hat man leicht die Gleichung

1) $z = \frac{xy}{c}$, alſo

2) $F = \int^2 \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\,dx\,dy$

$= \frac{1}{c}\int^2 \sqrt{c^2+y^2+x^2}\,.\,dx\,.dy$

nach y zwiſchen b und o und nach x zwiſchen a und o integrirt. Die erſte Integration giebt:

3) $F = \frac{1}{2c}\int dx\left[b\sqrt{b^2+c^2+x^2}\right.$

$\left.+(c^2+x^2)\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}}{\sqrt{c^2+x^2}}\right].$

Es iſt aber, zwiſchen a und o; $a^2+b^2+c^2=A^2$ und $b^2+c^2=B^2$ geſetzt,

4) $\frac{1}{2c}\int dx.b\sqrt{b^2+c^2+x^2} = \frac{b}{4c}\left[aA+B^2.\ln\frac{a+A}{B}\right];$

ferner

5) $\frac{1}{2c}\int dx.(c^2+x^2)\ln[b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]$

$= \frac{1}{6c}\int \ln[b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]\,\partial(3c^2x+x^3)\,dx$

$= \frac{1}{6c}[3c^2x+x^3]\ln[b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]$

$-\frac{1}{6c}\int \frac{(3c^2+x^2)x^2\,dx}{[b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]\sqrt{b^2+c^2+x^2}}$

und

6) $-\frac{1}{6c}\int \frac{(3c^2+x^2)x^2.dx}{[b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]\sqrt{b^2+c^2+x^2}}$

$= -\frac{1}{6c}\int \frac{[3c^2+x^2]x^2dx}{c^2+x^2} + \frac{b}{6c}\int \frac{[3c^2+x^2]x^2\,dx}{(c^2+x^2)\sqrt{b^2+c^2+x^2}}$

$= -\frac{1}{6c}\int (2c^2+x^2)\,dx + \frac{c^3}{3}\int \frac{dx}{c^2+x^2} + \frac{b}{6c}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{b^2+c^2+x^2}}$

$+\frac{bc}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+c^2+x^2}} - \frac{bc^3}{3}\int \frac{dx}{(c^2+x^2)\sqrt{b^2+c^2+x^2}}$

$$=-\frac{cx}{3}-\frac{x^3}{18c}+\frac{c^2}{3}\operatorname{Arctg}\frac{x}{c}+\frac{b}{12c}x\sqrt{b^2+c^2+x^2}$$

$$+\frac{b}{12c}[3c^2-b^2]\ln[x+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]-\frac{c^2}{3}\operatorname{Arctg}\frac{bx}{c\sqrt{b^2+c^2+x^2}};$$

und in diesem Resultat, Null für b geschrieben, und in 5) gesetzt

$$7)\ \frac{1}{2c}\int(c^2+x^2)\ln\sqrt{c^2+x^2}.dx=$$

$$\frac{1}{6c}[3c^2x+x^3]\ln\sqrt{c^2+x^2}-\frac{cx}{3}-\frac{x^3}{18c}+\frac{c^2}{3}\operatorname{Arctg}\frac{x}{c};$$

folglich

$$8)\ \frac{1}{2c}\int(c^2+x^2)\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}}{\sqrt{c^2+x^2}}$$

$$=\frac{3c^2x+x^3}{6c}\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2+x^2}}{\sqrt{c^2+x^2}}$$

$$+\frac{bx}{12c}\sqrt{b^2+c^2+x^2}+\frac{b(3c^2-b^2)}{12c}\ln[x+\sqrt{b^2+c^2+x^2}]$$

$$-\frac{c^2}{3}\operatorname{Arctg}\frac{bx}{c\sqrt{b^2+c^2+x^2}}.$$

Wird nun dieses Resultat zwischen den Grenzen a und o genommen, und zu 4) addirt, so entsteht aus 3)

$$9)\ F=\frac{1}{6c}\left[2abA+a[a^2+3c^2]\ln\frac{A+b}{\sqrt{a^2+c^2}}\right.$$

$$\left.+b[b^2+3c^2]\ln\frac{A+a}{\sqrt{b^2+c^2}}-2c^3\operatorname{Arctg}\frac{h}{A}\right].$$

Beispiel. Ist $a=b=h$; also $c=a$; $A=a\sqrt{2}$; $B=a\sqrt{2}$, so erhält man:

$$F=\frac{a^2}{3}\left[\sqrt{3}+2\ln[2+\sqrt{3}]-(n+\frac{1}{6})\pi\right]$$

und weil hier n nur $=o$ sein kann, $F=1{,}2808.a^2$.

Aufgabe VI.

Die Achse eines normalen, hohlen auf seiner Spitze stehenden, unbegrenzten Kegels, bilde mit den Seiten desselben den Winkel β und mit dem Horizont den Winkel α; (Fig. 5.) im Kegel befinde sich eine Wassermenge $= m$ und es sei eine Kugel zum Halbmesser r, von einer Materie, die schwerer als Wasser ist, eingesenkt, so daß sie also den Kegelmantel berührt. Es wird gesucht:

I. Die Relation zwischen m und r, für welche der höchste Berührungspunct B der Kugel mit dem Kegelmantel, in den Wasserspiegel BD fällt.

Diese Relation ist: m + Inhalt des Kugelabschnitts unter Wasser = Inhalt des Kegels ABD. Um nun beide Inhalte durch r, α und β auszudrücken, bezeichne γ die Summe $\alpha+\beta$; δ die Differenz $\alpha-\beta$, so folgt aus den Proportionen

$AB : BD = \text{Sin}ADB : \text{Sin}BAD$;

$AB : BE = \text{Sin}AEB : \text{Sin}BAE$; und

$AB : AE = \text{Sin}AEB : \text{Sin}ABE$; oder

$r\,\text{Cotg}\beta : BD = \text{Sin}\delta : \text{Sin}2\beta$;

$r\,\text{Cotg}\beta : BE = \text{Sin}\alpha : \text{Sin}\beta$ und

$r\,\text{Cotg}\beta : AE = \text{Sin}\alpha : \text{Sin}\gamma$;

$$BD = \frac{2r\,\text{Cos}\beta^2}{\text{Sin}\delta};\quad BE = \frac{r\,\text{Cos}\beta}{\text{Sin}\alpha};\quad \text{und } AE = \frac{r\,\text{Cotg}\beta\,\text{Sin}\gamma}{\text{Sin}\alpha}.$$

Es bildet aber der Wasserspiegel eine Ellipse, deren große Achse $= BD = \frac{2r\,\text{Cos}\beta^2}{\text{Sin}\delta}$ ist, und da die Ordinate dieser Ellipse

in $E_{,} = AE\,tg\beta = \frac{r\,Sin\gamma}{Sin\alpha}$ ist, so ergiebt sich aus der Gleichung für die Ellipse, die halbe kleine Achse derselben $= r\,Cos\beta . \sqrt{\frac{Sin\gamma}{Sin\delta}}$, und folglich der Inhalt dieser elliptischen Ebene

$$= \pi . \frac{r\,Cos\beta^2}{Sin\beta} . r\,Cos\beta \sqrt{\frac{Sin\gamma}{Sin\delta}} \text{ oder}$$

$$= \frac{\pi r^2\,Cos\beta^3}{Sin\delta} . \sqrt{\frac{Sin\gamma}{Sin\delta}} ;$$

demnach, da die Höhe des Kegels, der diese Ellipse zur Grund-Ebene hat, $= r\,Cotg\beta\,Sin\gamma$ ist, der Inhalt dieses Kegels

$$= \frac{\pi r^3\,Cos\beta^4}{3\,Sin\beta} \left[\frac{Sin\gamma}{Sin\delta}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Für den Kugelabschnitt ergiebt sich leicht die Höhe desselben $= r + r\,Cos\gamma$; und also der körperliche Inhalt

$$= \tfrac{1}{3}\pi r^3\,[1 + Cos\gamma]^2\,[2 - Cos\gamma].$$

Substituirt man nun diese Werthe, so ist die gesuchte Gleichung

$$3m = r^3\pi . \left[\frac{Cos\beta^4}{Sin\beta}\left[\frac{Sin\gamma}{Sin\delta}\right]^{\frac{3}{2}} - 2 - 3\,Cos\gamma + Cos\gamma^3\right] = r^3\pi . f_{\alpha,\beta}.$$

II. Die Gleichung zwischen m und r, für welche der Wasserspiegel die Kugel in ihren höchsten Punct T tangentirt.

$$\text{Es ist } AF = \frac{r}{Sin\beta} + \frac{r}{Sin\alpha} = r\frac{Sin\alpha + Sin\beta}{Sin\alpha\,Sin\beta} = 2r\frac{Sin\frac{\gamma}{2}\,Cos\frac{\delta}{2}}{Sin\alpha\,Sin\beta},$$

$$\text{dann } GF = \frac{AF\,Sin\beta}{Sin\gamma} = \frac{r\,Cos\frac{\delta}{2}}{Sin\alpha\,Cos\frac{\gamma}{2}}; \text{ ferner}$$

$$FH = \frac{AF\,.\,Sin\beta}{Sin\delta} = \frac{r\,Sin\frac{\gamma}{2}}{Sin\alpha\,Sin\frac{\delta}{2}};$$

also die große Achse GH der Ellipse, welche der Wasserspiegel bildet

$$= GF + FH = \frac{r \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{\delta}{2}} ;$$

die Ordinate dieser Ellipse in F,

$$= AF \cdot \operatorname{tg}\beta = 2r \frac{\operatorname{Sin}\frac{\gamma}{2} \operatorname{Cos}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta}$$

und also aus der Gleichung für die Ellipse, die halbe kleine Achse derselben

$$= r \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{Cotg}\frac{\delta}{2}} ;$$

folglich der Inhalt der elliptischen Ebene

$$= \frac{\pi r^2 \operatorname{Cos}\beta}{2 \operatorname{Cos}\frac{\gamma}{2} \operatorname{Sin}\frac{\delta}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{Cotg}\frac{\delta}{2}} ,$$

und da die Höhe des Kegels AGH,

$$= AF \cdot \operatorname{Sin}\alpha = 2r \frac{\operatorname{Sin}\frac{\gamma}{2} \operatorname{Cos}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{Sin}\beta} \text{ ist,}$$

der Inhalt desselben

$$= \tfrac{1}{3} r^3 \pi \operatorname{Cotg}\beta \cdot \left[\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{Cotg}\frac{\delta}{2}\right]^{\frac{3}{2}} ;$$

und folglich die verlangte Relation:

$$3m = r^3 \pi \left[\operatorname{Cotg}\beta \cdot \left[\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{Cotg}\frac{\delta}{2}\right]^{\frac{3}{2}} - 4\right] = r^3 \pi \cdot F_{\alpha,\beta} .$$

Beispiel. Ist $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$; so entsteht
in I. $m = 0{,}394 . \pi . r^3$; und
in II. $m = 2{,}828 . \pi . r^3$.

III. Der Ort des Wasserspiegels, wenn

$$m > \frac{r^3 \pi}{3} \cdot f_{\alpha,\beta} \text{ und}$$

$$m < \frac{r^3 \pi}{3} \cdot F_{\alpha,\beta} \text{ ist.}$$

Bezeichnet PQ diesen Ort, und wird $AR = x$ gesetzt, so erhält man:

$$PR = \frac{x \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\gamma}; \quad RQ = \frac{x \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\delta}; \quad \text{also}$$

$$PQ = \frac{2x \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta};$$

dann die Ordinate dieser Ellipse $= R = x \operatorname{tg}\beta$ und die halbe kleine Achse

$$= \frac{x \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\sqrt{\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta}};$$

folglich die Ebene

$$= \frac{\pi x^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Sin}\beta^2 \operatorname{Cos}\beta}{[\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta]^{\frac{1}{2}}}$$

und den Inhalt des Kegels

$$= \frac{\pi x^3 \operatorname{Sin}\alpha^3 \operatorname{Sin}\beta^3 \operatorname{Cos}\beta}{3[\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta]^{\frac{1}{2}}}.$$

Für den Kugel-Abschnitt unter Wasser, erhält man die Höhe desselben,

$$h = r + \left[x - \frac{r}{\operatorname{Sin}\beta}\right] \operatorname{Sin}\alpha = x \operatorname{Sin}\alpha - \frac{2 \operatorname{Cos}\frac{\gamma}{2} \operatorname{Sin}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{Sin}\beta} . r;$$

und folglich seinen Inhalt $= \frac{1}{3}\pi h^2 [3r - h]$

$$= -\operatorname{Sin}\alpha^3 . x^3 + \frac{3 \operatorname{Sin}\alpha^2}{\operatorname{Sin}\beta} r . x^2 + \frac{3 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta}{\operatorname{Sin}\beta^2} . r^2 x$$

$$+ \frac{4[\operatorname{Sin}\alpha + 2 \operatorname{Sin}\beta] \operatorname{Cos}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2}}{\operatorname{Sin}\beta^3} . r^3.$$

Wird nun die Summe von m und dem Kugelabschnitt, gleich gesetzt dem Inhalt des Kegels bis zum Wasserspiegel, so entsteht, gehörig geordnet

$$\operatorname{Sin}\alpha^3 \operatorname{Sin}\beta^3 \left[1 + \frac{\operatorname{Sin}\beta^2 \operatorname{Cos}\beta}{[\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta]^{\frac{1}{2}}}\right] x^3 - 3 \operatorname{Sin}\alpha^3 \operatorname{Sin}\beta^2 . r x^2$$

$$+ 3 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta . r^2 x$$

$$- \left[4(\operatorname{Sin}\alpha + 2 \operatorname{Sin}\beta) \operatorname{Cos}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2} . r^3 + \frac{3 \operatorname{Sin}\beta^3}{\pi} . m\right] = 0,$$

aus welcher Gleichung sich $AR = x$, also der Ort des Wasserspiegels bestimmt.

IV. Derjenige Werth von x, für welchen x ein Maximum wird, vorausgesetzt, daß $\varphi_{\alpha,\beta} > f_{\alpha,\beta}$ und $\varphi_{\alpha,\beta} < F_{\alpha,\beta}$; und $m = \frac{r^3\pi}{3}\varphi_{\alpha,\beta}$ sei.

Schreibt man $\frac{r^3\pi}{3}\varphi_{\alpha,\beta}$ für m in die cubische Gleichung in III., so nimmt sie folgende Form an

$$a.\left(\frac{x}{r}\right)^3 - b\left(\frac{x}{r}\right)^2 + c.\left(\frac{x}{r}\right) - d = 0,$$

worinnen a, b, c, d nur von α und β abhängig sind. Bezeichnet daher $\Psi_{\alpha,\beta}$ jeden der 3 Werthe von $\frac{x}{r}$, der dieser cubischen Gleichung genügt, so hat man $x = r\Psi_{\alpha,\beta}$ und also $\partial x = \Psi_{\alpha,\beta}$. Es liefert aber die Gleichung $\Psi_{\alpha,\beta} = 0$ keinen Werth für r, weil sie r nicht enthält, und also findet auch kein Maximum statt.

V. Die Höhe des Wasserspiegels für $\alpha = 90°$, vorausgesetzt daß m zwischen den in III. angegebenen Grenzen liegt.

Für $\alpha = 90°$ entsteht aus der cubischen Gleichung in III. folgende:

$$[x\,\mathrm{Sin}\beta - r\,\mathrm{Cos}\beta^2]^3 + (1-\mathrm{Sin}\beta)^2\,\mathrm{Sin}\beta^2\,\mathrm{Cos}\beta^2 . r^3 - \frac{3\mathrm{Sin}\beta^3\,\mathrm{Cos}\beta^2}{\pi} . m = 0,$$

worinnen $m > \frac{r^3\pi}{3} . \frac{(1-\mathrm{Sin}\beta)^2}{\mathrm{Sin}\beta}$ und

$m < \frac{r^3\pi}{3} . \frac{(1-\mathrm{Sin}\beta)^2 + 4\mathrm{Sin}\beta^2}{\mathrm{Sin}\beta(1-\mathrm{Sin}\beta)}$ vorausgesetzt ist.

Es ist aber die Differenz beider Grenzen

$$= \frac{r^3\pi}{3} . \frac{(1+\mathrm{Sin}\beta)^2}{1-\mathrm{Sin}\beta}$$

und man kann daher, wenn n jeden positiven ächten Bruch bezeichnet, also zwischen Null und Eins liegend gedacht wird,

$$m = \frac{r^3\pi}{3} . \left[\frac{(1-\mathrm{Sin}\beta)^2}{\mathrm{Sin}\beta} + n . \frac{(1+\mathrm{Sin}\beta)^2}{1-\mathrm{Sin}\beta}\right] \text{ setzen.}$$

Substituirt man diesen Werth β, und entwickelt x_1 so entsteht

$$x = r \cdot \frac{\mathrm{Cos}\beta^2 + \mathrm{Sin}\beta\,(1 + \mathrm{Sin}\beta) \cdot \sqrt[3]{n}}{\mathrm{Sin}\beta},$$

woraus auch hervorgeht, daß x ins Unendliche wächst, wenn β fortwährend kleiner gewählt wird.

Beispiel. Ist $n = \frac{1}{8}$, $\beta = 30°$; so wird

$x = \frac{3}{4}r$; und $m = \frac{11}{16}r^3\pi = \frac{11}{64}$ des Inhalts der Kugel.

Aufgabe VII.

Zwiſchen zwei gegebenen Puncten die ebene Curve zu finden, welche, wenn ſie ſich um eine in derſelben Ebene liegende gegebene gerade Linie herum dreht, die kleinſte Oberfläche beſchreibt.

Sind A und B (Fig. 6.) die gegebenen Puncte, C und D ihre normalen Projectionen auf die gegebene Umdrehungsachſe, $CD = a$, $AC = o$; $BD = b$; und bezeichnet x jede Abſciſſe von C ab, auf CD zwiſchen den Grenzen a und o; y die zugehörige normale Ordinate bis in die geſuchte Curve, und F den Quadrat-Inhalt der zugehörigen Oberfläche, vom Bogen $AE = v$ beſchrieben, ſo iſt

1) $F = 2\pi \int y \sqrt{1+\partial y_x^2}.dx$ und

2) $\partial v_x = \sqrt{1+\partial y_x^2}$, folglich

3) $y\sqrt{1+\partial y_x^2} = u$ und

4) $\partial y_x = p$ geſetzt, nach den Lehren der Variations-Rechnung, die allgemeine Bedingungsgleichung des Maximums und Minimums

5) $\partial u_y - \partial^2 u_{p,x} = o$.

Es iſt aber, aus 3) und 2)

6) $\partial u_y = \partial v_x$ und aus 3) und 4)

7) $\partial u_p = y.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y\partial y_x}{\partial v_x}$ und ſubſtituirt man beide Werthe in 5), ſo folgt

8) $\partial v_x - \partial\left[\frac{y\partial y_x}{\partial v_x}\right]_x = o$. Zu dieſer Gleichung iſt das erſte Integral

9) $v - \frac{y\partial y_x}{\partial v_x} = \text{Const} = \frac{A}{2}$; oder

10) $v\partial v_x - y\partial y_x = \frac{A}{2}\partial v_x$, alſo, wenn man zum zweitenmal integrirt,

11) $v^2 - y^2 + B = Av$, unter A und B noch willkührliche Conſtanten verſtanden. Um nun aus dieſer, der gewöhnlichen Kettenlinie zugehörigen Gleichung, die Coordinaten-Gleichung zu erhalten, eliminire man y und ∂y_x aus 2), 10) und 11), ſo entſteht

12) $\sqrt{4B - A^2}.\partial v_x = 2\sqrt{B - Av + v^2}$; und hieraus

13) $\partial x_v = \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{B - Av + v^2}}$;

alſo integrirt

14) $x = \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2} \ln[-A + 2v + 2\sqrt{B - Av + v^2}] + \text{Const}$,

oder $4B - A^2$ durch $4C^2$ ausgedrückt, und den Werth für v aus 11) ſubſtituirt,

15) $x = C \cdot \ln[y \pm \sqrt{y^2 - C^2}] + D$, in welchem Reſultat nur das obere Zeichen, der Bedingungs-Gleichung 5) Genüge leiſtet. Man hat daher das Reſultat

16) $x = C \cdot \ln[y + \sqrt{y^2 - C^2}] + D$ und die beiden Conſtanten C und D beſtimmen ſich durch folgende zwei, den Bedingungen der Aufgabe entnommenen Gleichungen:

17) $o = C \cdot \ln[c + \sqrt{c^2 - C^2}] + D$ und

18) $a = C \cdot \ln[b + \sqrt{b^2 - C^2}] + D$, aus welchen zur Ermittelung von C,

19) $a = C \cdot \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - C^2}}{c + \sqrt{c^2 - C^2}}$ hervorgeht.

Das Endreſultat 18) kann auch dargeſtellt werden, durch

$$20)\quad x = C \cdot \ln \frac{y+\sqrt{y^2-C^2}}{c+\sqrt{c^2-C^2}}.$$

Die kleinſte Oberfläche F′ iſt nun aus 1) leicht zu beſtimmen, man erhält

$$F' = 2\pi \int_{c\div c} y\sqrt{1+\partial y_x{}^2}.dx = 2\pi \int_{b\div c} y\sqrt{1+\partial y_x{}^2}.\partial x_y.dy$$

$$= 2\pi \int_{b\div c} \frac{y^2}{\sqrt{y^2-C^2}}.dy \text{ und hieraus}$$

$$F' = \pi\left[b\sqrt{b^2-C^2} - c\sqrt{c^2-C^2} + C^2 \ln \frac{b+\sqrt{b^2-C^2}}{c+\sqrt{c^2-C^2}}\right] \text{ oder}$$

$$F' = \pi\left[b\sqrt{b^2-C^2} - c\sqrt{c^2-C^2} + aC\right].$$

Beiſpiel. Iſt a = 8; c = 25; b = 49, ſo genügt der Gleichung 19) ziemlich genau C = 14,94... und dann wird

$$F' = 1102{,}6.\pi.$$

Denkt man ſich den abgekürzten Kegelmantel, welchen die gerade Linie AB bei der Umdrehung um CD erzeugt, ſo ergiebt ſich deſſen Fläche = 1105.π.

Aufgabe VIII.

Die Gleichung zwiſchen normalen Coordinaten für die durch den Anfangspunct der Abſciſſen gehende ebene Curve zu beſtimmen, für welche, ſowohl in Beziehung auf die Curve ſelbſt, als auch auf den Flächeninhalt der Ebene, (begrenzt von der Curve, der Abſciſſenlinie und der Ordinate im Endpunct jeder Abſciſſe x), der Umdrehungs-Oberfläche und den Inhalt des Umdrehungs-Körpers, — die Abſciſſe oder auch Ordinate des Schwerpuncts in einem beſtimmten Verhältniß zur begrenzenden Abſciſſe x oder Ordinate y ſtehe.

1) Die Abſciſſe u des Schwerpunctes des ſchweren Bogens v ſoll ſich zu x verhalten wie 1 zu n.

Es iſt $u = \frac{\int x.\sqrt{1+\partial y_x^{-2}}.dx}{\int\sqrt{1+\partial y_x^{2}}.dx}$ und daher die Bedingungsgleichung, wenn ∂v_x^2 für $1+\partial y_x^2$ geſetzt wird, $n\int x\partial v_x = x.v$. Aus dieſer Gleichung, nach x abgeleitet, und die beiden veränderlichen abgeſondert, folgt leicht:

$$\frac{\partial v_x}{v} = \frac{1}{n-1}.\frac{1}{x}\text{; und hieraus}$$

$$v = a.x^{\frac{1}{n-1}}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in $\partial v_x^2 = 1+\partial y_x^2$, ſo erhält man:

$$dy_x = \sqrt{\frac{a^2}{(n-1)^2}.x^{2.\frac{2-n}{n-1}} - 1}.$$

Das zugehörige Integral ist leicht angebbar, für $2.\frac{2-n}{n-1}=0$, $2.\frac{2-n}{n-1}=1$ und $2.\frac{2-n}{n-1}=2$. Im ersten Fall entsteht $y=x.\sqrt{a^2-1}$ also die gerade Linie; in den beiden andern Fällen wird y imaginär.

2) Die Ordinate z vom Schwerpunct des schweren Bogens v, soll sich zu y verhalten, wie 1:n.

Hier ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{\int y\partial v_x.dx}{v}:y=1:n \text{ und hieraus folgt}$$

$$n\int y\partial v_x.dx=v.y;$$

woraus, nach x abgeleitet, sich wie in 1)

$$v=a.y^{\frac{1}{n-1}} \text{ und dann}$$

$$\partial x_y=\sqrt{\frac{a^2}{(n-1)^2}y^{2.\frac{2-n}{n-1}}-1} \text{ ergiebt.}$$

Für $n=2;\ \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ folgt wie in 1) $x=y.\sqrt{a^2-1}$; und die beiden andern Vergleichungen werden imaginär.

3) Die Abscisse u vom Schwerpunct der schweren Ebene E soll sich zu x verhalten wie 1:n.

Es ist $\partial E_x=y$ und $u=\frac{\int x\partial E_x.dx}{E}$; also die Bedingung $\frac{\int x\partial E_x.dx}{E}:x=1:n$ und hieraus $n\int x\partial E_x dx=xE$; folglich $(n-1)x\partial E_x=E$; also $\frac{\partial E_x}{E}=\frac{1}{n-1}.\frac{1}{x}$; daher

$lnE=\frac{1}{n-1}.lnx+C$ oder $E=a.x^{\frac{1}{n-1}}$; demnach, aus

$y=\partial E_x$; $y=\frac{a}{n-1}.x^{\frac{2-n}{n-1}}$, so daß, weil x und y zugleich verschwinden sollen, $n>1$ und $n<2$ sein muß.

Für $n = \frac{1}{2}$ also $u = \frac{1}{2}x$ wird $y = 2a.x$ und die Ebene ist ein Dreieck. Für $n = \frac{1}{3}$ also $u = \frac{1}{3}x$; wird $y^3 = Ax$ also die Ebene paraboliſch.

4) Die Ordinate z vom Schwerpunct der ſchweren Ebene E ſoll ſich zu y verhalten, wie 1:n.

Es iſt $\partial E_x = y$ und $z = \frac{\int \frac{1}{2} y . \partial E_x dx}{E}$; und aus der Bedingungsgleichung:

$z : y = 1 : n$ ergiebt ſich bald

$E = A . y^{\frac{2}{n-2}}$, dann, aus

$y = \partial E_x = \partial E_y . \partial y_x = \frac{2A}{n-2} y^{\frac{4-n}{n-2}} \cdot \frac{1}{\partial x_y}$; folgt

$\partial x_y = \frac{2A}{n-2} y^{\frac{6-2n}{n-2}}$; und alſo iſt

$x = B . y^{\frac{4-n}{n-2}}$ oder $y = C . x^{\frac{n-2}{4-n}}$,

wo keine zweite Const hinzukommt, weil x und y zugleich verſchwinden ſollen und $n > 2$ und $n < 4$ ſein muß.

Für $n = 2\frac{1}{2}$ folgt $y^3 = ax^2$; für $n = 2\frac{2}{3}$ wird $y^2 = ax$; für $n = 3$; $y = ax$; für $n = 3\frac{1}{2}$; $y = ax^2$ u. ſ. w.

5) Die Abſciſſe u vom Schwerpunct der Umdrehungs-Oberfläche F (um x) ſoll ſich zur Abſciſſe x verhalten wie 1 zu n.

Es iſt, wenn v den Bogen bezeichnet, $\partial v_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}$ und $\partial F_x = 2\pi y \partial v_x$; daher die Bedingung

$u : x = 1 : n$; in die Gleichung

$n . \frac{2\pi \int xy \partial v_x . dx}{2\pi \int y \partial v_x . dx} = x$ oder $n \int xy \partial v_x = x \int y \partial v_x$ oder

$nxy \partial v_x = xy \partial v_x + \int y \partial v_x$ d. h.

$(n-1) xy \partial v_x = \int y \partial v_x$ übergeht. Hieraus folgt aber

$\frac{y \partial v_x}{\int y \partial v_x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x}$; und integrirt

$$\ln\left[\int y\partial v_x\right] = \frac{1}{n-1}\ln x + \text{Const}; \text{ woraus}$$

$$\int y\partial v_x = a.x^{\frac{1}{n-1}} \text{ folgt; dann ist die Oberfläche}$$

$$F = 2\pi a.x^{\frac{1}{n-1}} \text{ und also aus } \partial F_x = 2\pi y\partial v_x, \text{ nun}$$

$$\frac{a}{n-1}x^{\frac{2-n}{n-1}} = y.\sqrt{1+\partial y_x^2},$$

wodurch y als Function von x ausgedrückt ist.

Für $n=2$ ergiebt sich aus dieser Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$, welche dem Kreis angehört.

6) Die Abscisse U vom Schwerpunct des Umdrehungs-Körpers soll sich zur Abscisse x verhalten wie 1 zu n.

Hier entsteht leicht $y^2 = a.x^{\frac{2-n}{n-1}}$, wo der Aufgabe gemäß keine zweite Const. hinzukommt und $n>1$ und $n<2$ sein muß. Für $n=\frac{3}{2}$ entsteht $y=A.x$; für $n=\frac{4}{3}$ erhält man $y^2=Ax$.

Für $n = \frac{1}{2}$ also $u = \frac{1}{2}x$ wird $y = 2a.x$ und die Ebene ist ein Dreieck. Für $n = \frac{1}{2}$ also $u = \frac{1}{2}x$; wird $y^2 = Ax$ also die Ebene paraboliſch.

4) Die Ordinate z vom Schwerpunct der ſchweren Ebene E ſoll ſich zu y verhalten, wie 1:n.

Es iſt $\partial E_x = y$ und $z = \frac{\int \frac{1}{2} y . \partial E_x dx}{E}$; und aus der Bedingungsgleichung:

$z : y = 1 : n$ ergiebt ſich bald

$E = A . y^{\frac{2}{n-2}}$, dann, aus

$y = \partial E_x = \partial E_y . \partial y_x = \frac{2A}{n-2} y^{\frac{4-n}{n-2}} . \frac{1}{\partial x_y}$; folgt

$\partial x_y = \frac{2A}{n-2} y^{\frac{6-2n}{n-2}}$; und alſo iſt

$x = B . y^{\frac{4-n}{n-2}}$ oder $y = C . x^{\frac{n-2}{4-n}}$,

wo keine zweite Const hinzukommt, weil x und y zugleich verſchwinden ſollen und $n > 2$ und $n < 4$ ſein muß.

Für $n = 2\frac{1}{2}$ folgt $y^3 = ax$; für $n = 2\frac{2}{3}$ wird $y^4 = ax$; für $n = 3$; $y = ax$; für $n = 3\frac{1}{2}$; $y = ax^3$ u. ſ. w.

5) Die Abſciſſe v vom Schwerpunct der Umdrehungs-Oberfläche F (um x) ſoll ſich zur Abſciſſe x verhalten wie 1 zu n.

Es iſt, wenn v den Bogen bezeichnet, $\partial v_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}$ und

$\partial F_x = 2\pi y \partial v_x$; daher die Bedingung

$u : x = 1 : n$; in die Gleichung

$n . \frac{2\pi \int xy \partial v_x . dx}{2\pi \int y \partial v_x . dx} = x$ oder $n \int xy \partial v_x = x \int y \partial v_x$ oder

$nxy \partial v_x = xy \partial v_x + \int y \partial v_x$ d. h.

$(n-1) xy \partial v_x = \int y \partial v_x$ übergeht. Hieraus folgt aber

$\frac{y \partial v_x}{\int y \partial v_x} = \frac{1}{n-1} . \frac{1}{x}$; und integrirt

$$\ln\left[\int y\partial v_x\right] = \frac{1}{n-1}\ln x + \text{Const}; \text{ woraus}$$

$$\int y\partial v_x = a.\sqrt[n-1]{x^{n-1}} \text{ folgt; dann ist die Oberfläche}$$

$$F = 2\pi a_0 \sqrt[n-1]{x^{n-1}} \text{ und also aus } \partial F_x = 2\pi y\partial v_x, \text{ nun}$$

$$\frac{a}{n-1}\sqrt[n-1]{x^{n-1}} = y.\sqrt{1+\partial y_x^2},$$

wodurch y als Function von x ausgedrückt ist.

Für $n=2$ ergiebt sich aus dieser Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$, welche dem Kreis angehört.

6) Die Abscisse U vom Schwerpunct des Umdrehungs-Körpers soll sich zur Abscisse x verhalten wie 1 zu n.

Hier entsteht leicht $y^2 = a.\sqrt[n-1]{x^{2-n}}$, wo der Aufgabe gemäß keine zweite Const. hinzukommt und $n>1$ und $n<2$ sein muß. Für $n=\frac{3}{2}$ entsteht $y = A.x$; für $n=\frac{4}{3}$ erhält man $y^3 = Ax$.

Aufgabe IX.

Es ist zwischen rechtwinklichen Coordinaten x, y die allgemeine Gleichung einer Parabel gegeben, nämlich:

$$y^2+2axy+a^2x^2+by+cx+d=0;$$

durch die Coefficienten a, b, c, d derselben, auszudrücken:

I. Die berührende Ordinate BC und zugehörige Abscisse AB (Fig. 7.).

Wird $-ax-\frac{b}{2}$ durch φx und $(ab-c)x+\frac{1}{4}b^2-d$ durch fx ausgedrückt, so ist $y=\varphi x\pm\sqrt{fx}$, und aus der Gleichung: $fx=0$ entspringt der Werth von x, zu welchem nur eine Ordinate gehört, nämlich

$$AB=\frac{d-\frac{1}{4}b^2}{ab-c};$$

den zugehörigen Ordinaten-Werth giebt dann $\varphi(AB)$ und zwar

$$BC=\frac{2bc-4ad-ab^2}{4(ab-c)}.$$

II. Die beiden Entfernungen der Durchschnittspuncte D, E der Parabel mit der Abscissenlinie, vom Anfangspunct A der Abscissen.

Zu beiden Werthen von x, AD und AE ist $y=0$; daher ergeben sich beide aus der Gleichung:

$\varphi x \pm \sqrt{fx} = o$; man erhält

$$AE = \frac{-c+\sqrt{c^2-4a^2d}}{2a^2}$$

$$AD = \frac{-c-\sqrt{c^2-4a^2d}}{2a^2},$$

III. Den Winkel β, welchen die Ordinaten y mit den Durchmesser dieser Parabel bilden.

Wählt man irgend eine Abscisse $x = AF$, denkt sich die zugehörigen beiden Ordinaten $FG = \varphi x + \sqrt{fx}$ und $FH = \varphi x - \sqrt{fx}$ und halbirt die Differenz $GH = 2\sqrt{fx}$ in I, so daß also $GI = IH = \sqrt{fx}$ und $FI = \varphi x$ wird, so ist CI ein Durchmesser der Parabel, und Winkel $BCI = \beta$ gesetzt,

$$(BC - FI).tg\beta = AF - AB, \text{ also}$$

$$tg\beta = \frac{x - AB}{BC - \varphi x},$$

welcher Quotient sich nothwendig als unabhängig von x ergeben muß. Substituirt man die Werthe für φx, AB und BC aus I, so erhält man $tg\beta = \frac{1}{a}$;

IV. Die Gleichung zwischen den Abscissen u auf den Durchmesser CI, den Anfangspunct in C genommen, und den gleichen Ordinaten z unter dem Winkel β,

Es ist $u \sin\beta = x - AB$ und $z = \sqrt{fx}$ aus III., und eliminirt man x aus beiden Gleichungen, so entsteht, wenn die schon gefundenen Werthe eingeführt werden,

$$z^2 = \frac{ab-c}{\sqrt{a^2+1}} \cdot u.$$

V. Der Achsenparameter p der Parabel.

Nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel ist

$$\frac{p}{\sin\beta^2} = \frac{ab-c}{\sqrt{a^2+1}} \text{ und hieraus folgt}$$

$$p = \frac{ab-c}{[a^2+1]^{\frac{1}{2}}}.$$

VI. Die Entfernung e des Durchmeſſers CI von der Achſe KL der Parabel.

Denkt man ſich die Normale e aus C auf die Achſe KL, und bezeichnet die Entfernung des Durchſchnittspuncts vom Scheitelpunct K durch h, ſo hat man die beiden Gleichungen

$$e^2 = p.h \text{ und } [IH\,Sin\beta + e]^2 = p[h + CI + IH\,Cos\beta]$$

aus welchen, verbunden mit der IV.,

$$IH^2 = \frac{ab-c}{\sqrt{a^2+1}}.CI, \text{ ſich ergiebt}$$

$$e = \frac{a}{2}\cdot\frac{ab-c}{(a^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$h = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{ab-c}{(a^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

VII. Die Abſciſſen AM und AL bis zu den Durchſchnittspuncten M, L des Durchmeſſers CI und der Achſe KL mit der Abſciſſenlinie X.

Es iſt $AM = AB + BC.tg\beta$ und

$AL = AM + e.Sec\beta$; woraus

$$AM = -\frac{b}{2a}, \text{ und}$$

$$AL = -\frac{ac+b}{2a(a^2+1)} \text{ entſteht.}$$

VIII. Die größte Ordinate NP und die zugehörige Abſciſſe AN.

Aus der Gleichung $\partial[\varphi x + \sqrt{fx}]_x = o$ erhält man

$$AN = \frac{4a^2d + c^2 - 2abc}{4a^2(ab-c)} \text{ und dann auch}$$

$$NP = \frac{c^2 - 4a^2d}{4a(ab-c)}.$$

IX. Die Ebene der Parabel, bis zur Abſciſſenlinie, alſo den Inhalt von DKE.

Es iſt $DKE = \int_{AD \div AB} z.\sqrt{fx}.dx + \int_{AE \div AD} (\varphi x + \sqrt{fx})\,dx$; oder auch

$$DKE = \int_{AE \div AB} (\varphi x + \sqrt{fx})\,dx - \int_{AD \div AB} (\varphi x - \sqrt{fx})\,dx;$$

oder auch, wenn w die Differenz der beiden Abscissen x zu jeder Ordinate y ausdrückt, $DKE = \int_{NP \div o} w.dy$. Zur Ausführung dieses dritten Wegs entspringt aus der gegebenen Gleichung:

$$x = -\frac{2ay+c}{2a^2} \pm \frac{\sqrt{c^2-4a^2d-4a(ab-c)y}}{2a^2}$$

und also ist

$$w = \frac{\sqrt{c^2-4a^2d-4a(ab-c)y}}{a^2}; \text{ und hieraus}$$

$$2a^4w = -4a(ab-c).\partial y_w; \text{ also}$$

$$DKE = \int_{NP \div o} w.dy = \int_{o \div DE} w.\frac{2a^4w}{-4a(ab-c)}.dw; \text{ folglich}$$

$$\text{Ebene } DKE = \frac{(c^2-4a^2d)^{\frac{3}{2}}}{6a^3(ab-c)}.$$

X. Die Entfernung y_o des Schwerpuncts der Ebene DKE von X.

Es ist das Moment $= \int_{NP \div o} y.w\,dy = \int_{o \div DE} yw\partial y_w.dw$

$$= \frac{[c^2-4a^2d]^{\frac{5}{2}}}{60a^4[ab-c]^2}; \text{ folglich}$$

$$y_o = \frac{c^2-4a^2d}{10a(ab-c)}.$$

XI. Die Entfernung x_o des Schwerpunctes dieser Ebene, von Y.

Es ist das Moment $=$

$$\int_{NP \div o} w\,dy\left[-\frac{2ay+c}{2a^2}\right] = -\frac{1}{a}\int_{NP \div o} yw\,dw - \frac{c}{2a^2}\int_{o \div DE} w\partial y_w.dw$$

$$= \frac{4c^2+4a^2d-5abc}{60a^3(ab-c)^2}.[c^2-4a^2d]^{\frac{3}{2}}; \text{ folglich}$$

$$x_o = \frac{4c^2+4a^2d-5abc}{10a^2(ab-c)}.$$

Beiſpiel. Iſt $a = \frac{3}{4}$; $b = -10$; $c = -10$; $d = \frac{100}{3}$; ſo entſteht:

$$AB = \frac{10}{3};\ BC = \frac{5}{2};\ AD = \frac{40}{9};\ AE = \frac{40}{3};\ \text{alſo}$$

$$DE = \frac{80}{9};\ tg\beta = \frac{4}{3};\ z^2 = 2 \cdot u;\ p = \frac{32}{25};$$

$$e = \frac{12}{25};\quad h = \frac{9}{50};\ AM = \frac{20}{3};\ AL = \frac{112}{15};$$

$$AN = \frac{40}{9};\ NP = \frac{10}{3};\ \text{die paraboliſche}$$

Ebene $DKE = \frac{1600}{81}$; $y_0 = \frac{4}{3}$; $x_0 = \frac{64}{9}$.

Aufgabe X.

In der Peripherie einer Kreis-Ebene zum Halbmesser a bewegt sich unter bleibender Neigung δ, eine Kreis-Ebene zum Halbmesser r, so daß also jeder Punct der Peripherie des letzteren Kreises eine Curve von doppelter Krümmung (sphärische Epicycloide) beschreibt; die Länge v jedes Bogens dieser Curve, und die Entfernung seines Schwerpunctes vom Grundkreis zu bestimmen.

I. Denkt man sich die Kreis-Ebene AC (Fig. 8.) unter dem Winkel δ gegen die AM geneigt, und in A berührend, betrachtet den höchsten Punct C als den beschreibenden Punct, den Bogen $AD = r\beta$ auf den Bogen $AD' = a\alpha = AD$ abgewälzt, und $D'N'C' = DNC$ gemacht; so ist der beschreibende Punct jetzt in C', wenn die Ebene D'N'C' in der Lage gedacht wird, in welcher sie mit der Ebene des Grundkreises AMD' den unveränderlichen Winkel δ bildet. Ist nun D'B die gemeinschaftliche Tangente beider sich jetzt in D' berührenden Kreise, E die Projection von C' auf die Ebene des Grundkreises, EF normal auf AM, und man bezeichnet die rechtwinklichen Coordinaten des Punctes C', MF durch x, FE durch y und EC' durch z, so ist für jedes unvariable u

1) $v = \int \sqrt{\partial x_u^2 + \partial y_u^2 + \partial z_u^2} \, . \, du.$

Es ergeben sich aber aus der Figur folgende Vergleichungen:

2) $a\alpha = r\beta$;

3) $CB = r + r\cos\beta$;

4) $z = C'B \, . \sin\delta = r(1 + \cos\beta) \sin\delta$;

5) $BE = C'B \operatorname{Cos}\delta = r(1+\operatorname{Cos}\beta)\operatorname{Cos}\delta$;

6) $y = MD' \operatorname{Sin}\alpha + BD' \operatorname{Cos}\alpha - BE \operatorname{Sin}\alpha$
$= a \operatorname{Sin}\alpha + r \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha - r(1+\operatorname{Cos}\beta)\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}\alpha$;

7) $x = MD' \operatorname{Cos}\alpha - BD' \operatorname{Sin}\alpha - BE \operatorname{Cos}\alpha$
$= a \operatorname{Cos}\alpha - r \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\alpha - r(1+\operatorname{Cos}\beta)\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\alpha$;

und hieraus, weil $1+\operatorname{Cos}\beta = 2\operatorname{Cos}^2\frac{\beta}{2}$ und aus 2)

$\partial\alpha_\beta = \frac{r}{a}$ iſt,

8) $\partial z_\beta = -r \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\beta$;

9) $\partial y_\beta = r\left[2\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\delta\right]$
$-\frac{r^2}{a}\left[\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta + 2\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}^2\frac{\beta}{2}\right]$;

10) $\partial x_\beta = r\left[-2\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\delta\right]$
$-\frac{r^2}{2}\left[\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta - 2\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}^2\frac{\beta}{2}\right]$.

Quadrirt man nun 8), 9), und 10) und addirt, ſo entſteht

10) $\partial x_\beta^2 + \partial y_\beta^2 + \partial z_\beta^2$
$= \frac{4r^2}{a^2}\operatorname{Cos}^2\frac{\beta}{2}\left[(a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 + r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\beta}{2}\right]$

alſo, aus 1)

12) $v = \frac{2r}{a}\int \operatorname{Cos}\frac{\beta}{2}\sqrt{(a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 + r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Sin}^2\frac{\beta}{2}}\,.\,d\beta$.

oder $\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2} = u$ geſetzt, alſo $\partial\beta_u$. du für $d\beta$ und $\frac{2}{\operatorname{Cos}\frac{\beta}{2}}$ für $\partial\beta_u$,

daher $\frac{2\,du}{\operatorname{Cos}\frac{\beta}{2}}$ für $d\beta$ geſchrieben,

13) $v = \frac{4r}{a}\int \sqrt{(a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 + r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 . u^2}\,.\,du$; folglich,

weil mit $\beta = o$, alſo auch $u = o$, v verſchwindet,

14) $$v = \frac{2r}{a}\left[\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2}\sqrt{[a-r\operatorname{Cos}\delta]^2+\left[r\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2}\right]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{[a-r\operatorname{Cos}\delta]^2}{r\operatorname{Sin}\delta}\ln\frac{r\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2}+\sqrt{[a-r\operatorname{Cos}\delta]^2+\left[r\operatorname{Sin}\delta\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2}\right]^2}}{a-r\operatorname{Cos}\delta}\right]$$

Beispiele. 1) Ist C in der Peripherie des Grundkreises angekommen, also $\beta = \pi$, so giebt die Formel 14) die Länge V des halben epicycloidischen Bogens, nehmlich

$$V = \frac{2r}{a}\left[\sqrt{a^2+r^2-2ar\operatorname{Cos}\delta}+\frac{[a-r\operatorname{Cos}\delta]^2}{r\operatorname{Sin}\delta}\times\right.$$

$$\left.\ln\frac{r\operatorname{Sin}\delta+\sqrt{a^2+r^2-2ar\operatorname{Cos}\delta}}{a-r\operatorname{Cos}\delta}\right].$$

2) Ist $\beta = \pi$ und $\delta = \frac{\pi}{2}$; so entsteht

$$V = \frac{2r}{a}\left[\sqrt{a^2+r^2}+\frac{a^2}{r}\ln\frac{r+\sqrt{a^2+r^2}}{a}\right].$$

3) Ist $\beta = \pi$; $\delta = \frac{\pi}{2}$ und $r = a$; so folgt

$$V = 2a[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].$$

4) Ist $\beta = \pi$; $\delta = 0$; so erhält man die Länge der halben Hypocycloide, nehmlich

$$V = \frac{4r(a-r)}{a} \text{ und, wenn } 2r = a \text{ ist, } V = a.$$

5) Ist $\beta = \pi$ und $\delta = \pi$, so ergiebt sich die Länge der halben Epicycloide, nehmlich

$$v = \frac{4r(a+r)}{a} \text{ und, wenn } 2r = a \text{ ist, } v = 3a.$$

II. Zur Bestimmung der Entfernung z_0 des Schwerpunctes der Curve v von der Ebene $a^2\pi$, ist

$v.z_0 = \int z.dv$; also nach I. 4) und 13)

$$v.z_0 = \frac{8r^2\operatorname{Sin}\delta}{a}\int(1-u^2).\sqrt{[a-r\operatorname{Cos}\delta]^2+r^2\operatorname{Sin}\delta^2.u^2}.du$$

woraus, nach ausgeführter Integration und Bestimmung der Const. sich

$$v.z_0 = \frac{4r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 - (a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 - 2r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Sin}\frac{\beta^2}{2}}{a \operatorname{Sin}\delta} \times$$

$$\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2}\sqrt{(a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 + r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Sin}\frac{\beta^2}{2}}$$

$$+ \frac{[(a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 + 4r^2 \operatorname{Sin}\delta^2]\,[a - r\operatorname{Cos}\delta]^2}{ar \operatorname{Sin}\delta^2} \times$$

$$\ln \frac{r \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\frac{\beta}{2} + \sqrt{(a - r\operatorname{Cos}\delta)^2 + r^2 \operatorname{Sin}\delta^2 \operatorname{Sin}\frac{\beta^2}{2}}}{a - r\operatorname{Cos}\delta}$$

ergiebt.

Beispiele. 1) Ist $\beta = \pi$; $\delta = \frac{\pi}{2}$; so entsteht

$$v.z_0 = \frac{(2r^2 - a^2)\sqrt{a^2 + r^2}}{a} + \frac{(4r^2 + a^2)a}{r} \ln \frac{r + \sqrt{a^2 + r^2}}{a}.$$

2) Ist $\beta = \pi$; $\delta = \frac{\pi}{2}$; $r = a$; so ergiebt sich

$v.z_0 = a^3 [\sqrt{2} + 5 \ln (1 + \sqrt{2})]$; also

$$z_0 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 5 \ln (1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})} = 1{,}266 \ldots a .$$

Aufgabe XI.

Auf den Schenkeln eines rechten Winkels ABC (Fig 9.) sind vom Scheitelpunct B ab, die gleichen Längen $BA = BC = a$ abgetragen. Zu bestimmen:

I. Die Gleichung derjenigen Curve zwischen A und C, für welche die Tangente jedes Punctes derselben bis in die beiden Schenkel verlängert, $= a$ wird.

Ist EF die Tangente irgend eines Punctes D der gesuchten Curve, $BG = x$ und $GD = y$ die zugehörigen normalen Coordinaten, und z der Winkel dieser Tangente gegen BC, so hat man $ED = \frac{x}{\mathrm{Cos}\,z}$ und $DF = \frac{y}{\mathrm{Sin}\,z}$; also die Bedingungsgleichung:

1) $a = \frac{x}{\mathrm{Cos}\,z} + \frac{y}{\mathrm{Sin}\,z}$; oder $a\,\mathrm{Sin}\,z = y + x\,\mathrm{tg}\,z$.

Ferner hat man aus den einfachen Gesetzen der Curvenlehre:

2) $\mathrm{tg}\,z = \partial(DG)_{CG} = \frac{\partial y_x}{\partial(a-x)_x} = -\partial y_x$.

Um nun eine der 3 Veränderlichen x, y, z zu eliminiren, nehme man die Ableitung von 1) nach x, und substituire 2), so entsteht

3) $a\,\mathrm{Cos}\,z\,.\,\partial z_x = -\mathrm{tg}\,z + \mathrm{tg}\,z + x\,\mathrm{Sec}\,z^2\,\partial z_x$; oder

4) $[a\,\mathrm{Cos}\,z - x\,\mathrm{Sec}\,z^2]\,.\,\partial z_x = 0$, welcher Gleichung Genüge geschieht, sowohl für $\partial z_x = 0$, wozu die gerade Linie gehört, welche unserer Aufgabe nicht entspricht, als auch für

$a\,\mathrm{Cos}\,z - x\,\mathrm{Sec}\,z^2 = 0$, woraus

5) $x = a\,\mathrm{Cos}z^3$ und dann aus 1)

6) $y = a\,\mathrm{Sin}z^3$ entſpringt.

Aus 5) und 6) erhält man auch die Coordinaten-Gleichung

7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, ſo daß alſo die Curve vom 6ten Grad iſt.

II. Die Länge $AD = v$ jedes Bogens der in I. gefundenen Curve.

Es iſt $\partial v_x^2 = 1 + \partial y_x^2 = 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$; alſo

1) $v = \sqrt[3]{a} \int \sqrt[3]{x} \,.\, dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{ax^5} = \frac{3}{5}\,a\,\mathrm{Cos}z^5$ und daher

2) $AC = \frac{3}{5}a$.

III. Die Coordinaten x_0, y_0 des Schwerpunctes von v.

Es iſt $v.x_0 = \int x.\partial v_x.dx = a^{\frac{1}{3}} . \int x^{\frac{2}{3}}.dx$; alſo

1) $v.x_0 = \frac{3}{5}x.\sqrt[3]{ax^2}$, folglich

2) $x_0 = \frac{2}{5}x$.

Eben ſo iſt $v.y_0 = \int y\,\partial v_x . dx$

$$= \int y . \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} . \partial x_y . dy = -\sqrt[3]{a} . \int y^{\frac{2}{3}} . dy, \text{ alſo}$$

3) $v.y_0 = -\frac{3}{5}\,y.\sqrt[3]{ay^2} + C$

$= \frac{3}{5}[a^2 - y\sqrt[3]{ay^2}]$; folglich

4) $y_0 = \frac{2}{5} . \frac{a^2 - y.\sqrt[3]{ay^2}}{a - \sqrt[3]{ay^2}}$.

Für den ganzen Bogen AC wird $x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a$.

IV. Den Inhalt P der Ebene ABC.

Es iſt $P = \int_{b \div a} y\,.\,dx = \int_{0 \div \frac{\pi}{2}} a\,\mathrm{Sin}z^3 \,.\, \partial x_z \,.\, dz$

$$= -3a^2 \int [\mathrm{Sin}z^4 - \mathrm{Sin}z^6]\,dz$$

$$= -\frac{a^2}{16}\left[3z + [8\,\mathrm{Sin}z^4 - 2\,\mathrm{Sin}z^2 - 3]\,\mathrm{Sin}z\,\mathrm{Cos}z\right]$$

zwiſchen den Grenzen a und $\frac{1}{2}\pi$; alſo

$$P = \frac{3\pi}{32} \cdot a^2 .$$

V. Die Coordinaten x_0, y_0 des Schwerpunctes von P.

Es ist $P.x_0 = \int_{a \div o} xy\,dx = a^2 \int_{o \div \frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}z^3\,\mathrm{Cos}z^3\,.\partial x_z\,.dz$

$$= -3a^2 \int_{o \div \frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}z^4\,\mathrm{Sin}z^4\,.dz\,;$$ oder auch

$$P.x_0 = -3a^2 \int [1 - \mathrm{Sin}z^2]^2\,\mathrm{Sin}z^4\,.\partial \mathrm{Sin}z_z\,.dz$$

$$= -3a^2.[\tfrac{1}{7}\mathrm{Sin}z^7 - \tfrac{2}{9}\mathrm{Sin}z^9 + \tfrac{1}{11}\mathrm{Sin}z^{11}]$$

zwischen o und $\frac{\pi}{2}$; woraus

1) $P.x_0 = \frac{8}{105} a^3$ und dann

2) $x_0 = \frac{256}{315\pi} . a$ folgt.

Eben so ergiebt sich

$$P.y_0 = \int_{a \div o} \tfrac{1}{2} y\,.\,y\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2} a^3 \int_{o \div \frac{\pi}{2}} [1 - \mathrm{Cos}z^2]^3\,\mathrm{Cos}z^2\,.\partial \mathrm{Cos}z_z$$

$$= \tfrac{1}{2} a^3 [\tfrac{1}{7}\mathrm{Cos}z^7 - \tfrac{3}{9}\mathrm{Cos}z^9 + \tfrac{3}{11}\mathrm{Cos}z^{11} - \tfrac{1}{13}\mathrm{Cos}z^{13}]$$

zwischen den angegebenen Grenzen, also

3) $P.y_0 = \frac{8}{105} a^3$ und, wie nothwendig

4) $y_0 = x_0$.

VI. Den Inhalt Q des Körpers, welchen die Ebene P bei der Umdrehung um BC erzeugt.

Es ist $Q = \pi \int_{a \div o} y^2\,dx$

$$= \pi \int_{x=0}^{a} [a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}]^3 \, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} . x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} . x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} x^3\right]$$

zwischen a und o, also

$$Q = a^2 \pi . \frac{16}{105} . a .$$

VII. Die Abscisse x_0 des Schwerpunctes von Q.

Es ist $Q . x_0 = \pi \int_{x=0}^{a} xy^2 . dx$, woraus, wie in VI.,

$Q . x_0 = \frac{\pi a^4}{15}$, also

$x_0 = \frac{21}{128} a$ folgt.

Aufgabe XII.

Um einen normalen Cylinder-Mantel ist ein rechtwinkliches Dreieck, dessen eine Cathete der Peripherie der Grundebene des Cylinders gleich ist, so herum gelegt, daß diese Cathete auf die Peripherie der Grundebene des Cylinders, und die Ebene des Dreiecks in den Cylinder-Mantel fällt, die Hypotenuse dieses Dreiecks also auf dem Cylinder-Mantel eine Schraubenlinie bildet. Wenn nun durch jeden Punct dieser Schraubenlinie, als Curve doppelter Krümmung, eine Normale auf die Achse des Cylinders gefällt, und außerhalb des Mantels desselben alle diese Normalen um gleichviel verlängert werden, so bilden dieselbe eine Fläche (Bekleidung einer Wendeltreppe), deren Inhalt F und der Schwerpunct derselben berechnet werden soll.

1) Die Endpuncte aller Verlängerungen liegen ebenfalls in einem Cylinder-Mantel; wird der Halbmesser des innern Cylinders, MD = ME (Fig. 10.) durch ϱ; der des äußern MA = MC = MB durch r; ein veränderlicher, MG = MH durch x; die andere Cathete des herum gelegten Dreiecks durch h, der veränderliche Winkel AMC durch φ, und die entsprechende Höhe zu x und φ, nehmlich HL = EK = CN durch z bezeichnet; so ist $\varphi : 2\pi = z : h$, also $z = \frac{h}{2\pi}\varphi$; ferner der Cosinus des Winkels, welchen das Flächen-Element in L mit der Grundebene bildet

$$= \frac{GH}{GL} = \frac{x\varphi}{\sqrt{x^2\varphi^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}},$$

und die Projection dieſes Elements auf die Grundebene $= x \cdot d\varphi \cdot dx$, folglich der Inhalt des Elements ſelbſt

$$= x \cdot d\varphi\, dx : \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \cdot dx \cdot d\varphi; \text{ und daher}$$

$$F = \int^2 \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \cdot dx \cdot d\varphi$$

nach φ zwiſchen 2π und o und nach x zwiſchen r und ϱ integrirt.

Es entſteht

$$F = 2\pi \cdot \int \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \cdot dx$$

$$= \pi \left[x \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \ln \left[x + \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \right] \right],$$

alſo

$$F = \pi \left[r \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2} - \varrho \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + \varrho^2} + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \ln \frac{r + \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2}}{\varrho + \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + \varrho^2}} \right];$$

oder, die Länge der innern Schraubenlinie durch a und die der äußern durch A ausgedrückt

$$F = \tfrac{1}{2} [Ar - a\varrho] + \frac{h^2}{4\pi} \cdot \ln \frac{2r\pi + A}{2\varrho\pi + a}.$$

Aus der Anſicht $F = \int GL \cdot dx$ ergiebt ſich die Formel ebenfalls.

2) Bezeichnet z_0 die Entfernung des Schwerpunctes der Fläche F von der Grund-Ebene, ſo iſt

$$F \cdot z_0 = \int^2 \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \cdot dx \cdot d\varphi \cdot \frac{h\varphi}{2\pi},$$

woraus $F \cdot \frac{h}{2}$ hervorgeht, ſo daß alſo $z_0 = \frac{h}{2}$ iſt.

3) Bezeichnet x_0 die Entfernung des Schwermantels von der Achse des Cylinders, so ist:

$$F \cdot x_0 = \int^2 \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \cdot dx \cdot d\varphi \cdot x \text{; woraus}$$

$$F \cdot x_0 = \frac{A^3 - a^3}{12\pi^2} \text{ folgt.}$$

4) Soll die Entfernung y_0 des Schwerpunctes der halben Windung (also von $\frac{1}{2}F$) von dem Achsendurchschnitt durch den Anfangs-Halbmesser AM bestimmt werden; so ist

$$\frac{F}{2} \cdot y_0 = \int^2 \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + x^2} \cdot dx \cdot d\varphi \cdot [x \operatorname{Sin} \varphi]$$

nach φ zwischen π und 0 und nach x zwischen r und ρ integrirt. Es entsteht

Aufgabe XIII.

Um einen, nicht um seine Achse drehbaren, festen Cylinder ist ein vollkommen biegsames, als gewichtlos anzusehendes Seil gewickelt, und an dem einen Endpunct A tangential durch eine Kraft Q angespannt. Es soll die Kraft y, am andern Endpunct B eines Bogens AB, in einem normalen Querschnitt des erwähnten Cylinders, tangential entgegen wirkend, fürs Gleichgewicht mit Q und der auf dem Bogen AB sich erzeugenden widerstrebenden Reibung, bestimmt werden. (Fig. 11.)

Bezeichnet r den Halbmesser des Cylinders, x den Mittelpuncts-Winkel AMB zum Bogen AB; z den gesamten, in jeden Punct des Bogens AB = rx normalen, Gegendruck des Cylinders von A bis B, und denkt man sich nun die zusammengehörigen unendlich kleinen Aenderungen dx, dz und dy und zerlegt alle Kräfte nach den Richtungen von Q und AM, so hat man, unter μ den Reibungs-Coefficienten verstanden,

1) nach der Richtung von Q, die Kräfte

$$+Q;\quad +\Sigma[\mu dz.\mathrm{Cos}\,x];\quad -\Sigma[dz.\mathrm{Sin}\,x];\quad -y\,\mathrm{Cos}\,x;$$

2) nach der Richtung von AM, folgende:

$$+y\,\mathrm{Sin}\,x;\quad -\Sigma[\mu dz.\mathrm{Sin}\,x];\quad -\Sigma[dz.\mathrm{Cos}\,x]$$

und demnach, den statischen Gleichgewichts-Bedingungen entsprechend, folgende 3 Gleichungen:

3) $Q + \Sigma[\mu\, dx \operatorname{Cos} x] = y \operatorname{Cos} x + \Sigma[dx \operatorname{Sin} x]$;

4) $y \operatorname{Sin} x = \Sigma[\mu\, dx \operatorname{Sin} x] + \Sigma[dx . \operatorname{Cos} x]$; und

5) $y = Q + \mu \Sigma$; oder

6) $Q + \mu \int \operatorname{Cos} x . dx = y \operatorname{Cos} x + \int \operatorname{Sin} x\, dx$;

7) $y \operatorname{Sin} x = \mu \int \operatorname{Sin} x\, dx + \int \operatorname{Cos} x dx$;

8) $y = Q + \mu z$.

Nimmt man nun die Ableitungen dieser 3 Gleichungen, nach x, nachdem man zuvor überall $\partial z_x . dx$ für dz gesetzt hat, so entsteht

9) $\mu \operatorname{Cos} x\, \partial z_x = -y \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x . \partial y_x + \operatorname{Sin} x\, \partial z_x$;

10) $y \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x . \partial y_x = \mu \operatorname{Sin} x\, \partial z_x + \operatorname{Cos} x . \partial z_x$;

11) $\partial y_x = \mu\, \partial z_x$; und substituirt dann den Werth für ∂y_x aus 11) in 9) und 10), so ergiebt sich sowohl aus 9) als aus 10) $y = \partial z_x$ und man hat zur Bestimmung von y und z blos die folgenden beiden Gleichungen

12) $\partial y_x = \mu\, \partial z_x$ und

13) $y = \partial z_x$. Die Verbindung beider giebt

14) $\frac{\partial y_x}{y} = \mu$; also

15) $\ln y = \mu x + \text{Const}$, und weil für $x = o$; $y = Q$ wird, hieraus

16) $\ln y = \mu x + \ln Q$; folglich

I. $y = e^{\mu x} . Q$, wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Aus 13) hat man nun auch

17) $\partial z_x = e^{\mu x} . Q$; also integrirt

18) $z = \frac{e^{\mu x} . Q}{\mu} + \text{Const}$; folglich, weil x und z zugleich verschwinden

II. $z = \frac{e^{\mu} - 1}{\mu}, Q$

Fällt z. B. B in A, d. h. ist $x = 2\pi i$ so entsteht

$$y = e^{2\mu\pi} \cdot Q = \frac{e^{\mu} - 1}{\mu} \cdot Q.$$

Aufgabe XIV.

In einer Vertical-Ebene sei ein gewichtloses vollkommen biegsames Seil von bestimmter Länge a über eine Rolle mit horizontaler Achse geleitet und an beiden Endpuncten Gewichte P, Q angehangen, welchen Curven in derselben Verticalebene, zu ihrer Bahn angewiesen sind, so gedacht, daß ohne Berücksichtigung der Reibung fortwährend Gleichgewicht zwischen P und Q statt findet. Die Rolle so wie die Gewichte P und Q werden als einzelne Puncte betrachtet, und die eine der beiden Curven als gegeben angesehen; es soll die Gleichung für die andere, d. h. für die Gleichgewichts-Curve hergeleitet werden.

Ist in A (Fig. 12.) die Rolle, und bezeichnet für irgend eine Lage z die Länge des Seils von A bis zum Gewicht P, y die von A bis zum Gewicht Q; u den Winkel, welchen z, x den, welchen y mit der Verticale bildet; α den, welchen z mit der Tangente der Curve in P, β den, welchen y mit der Tangente der Curve in Q, γ den, welchen die Tangente in P, δ den, welchen die Tangente in Q mit der Verticale einschließt, so sind die Seilspannungen in z und $y = \frac{P \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\alpha}$ und $\frac{Q \operatorname{Cos}\delta}{\operatorname{Cos}\beta}$; also die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts:

1) $\frac{P \operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{Q \operatorname{Cos}\delta}{\operatorname{Cos}\beta}$; oder

2) $P \operatorname{Cos}\gamma . \operatorname{Cos}(\delta - x) = Q \operatorname{Cos}\delta . \operatorname{Cos}(\gamma - u)$; oder

3) $P[\operatorname{Cos}x + \operatorname{tg}\delta \operatorname{Sin}x] = Q.[\operatorname{Cos}u + \operatorname{tg}\gamma . \operatorname{Sin}u]$.

Nun ist aber

$$\operatorname{tg}\delta = \partial(y\operatorname{Sin}x)_{y\operatorname{Cos}x} = \partial(y\operatorname{Sin}x)_x \cdot \partial x_{y\operatorname{Cos}x}$$

$$= \partial(y\operatorname{Sin}x)_x \cdot \frac{1}{\partial(y\operatorname{Cos}x)_x}\ ;\ \text{oder}$$

4) $$\operatorname{tg}\delta = \frac{y\operatorname{Cos}x + \operatorname{Sin}x\,\partial y_x}{-y\operatorname{Sin}x + \operatorname{Cos}x\,.\,\partial y_x}\ ;\ \text{und eben so}$$

5) $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\partial(z\operatorname{Sin}u)_x}{\partial(z\operatorname{Cos}u)_x} = \frac{z\operatorname{Cos}u\,.\,\partial u_x + \operatorname{Sin}u\,\partial z_x}{-z\operatorname{Sin}u\,.\,\partial u_x + \operatorname{Cos}u\,.\,\partial z_x}$$

und substituirt man beide Werthe in 3), so entsteht

6) $$\frac{P\,.\,\partial y_x}{\partial(y\operatorname{Cos}x)_x} = \frac{Q\,.\,\partial z_x}{\partial(z\operatorname{Cos}u)_x}\ .$$

Aus $y + z = a$ folgt aber $\partial y_x + \partial z_x = o$; und wird hieraus der Werth für ∂z_x in 6) gesetzt, so ergiebt sich:

7) $(P\,\partial(z\operatorname{Cos}u)_x + Q\,\partial(y\operatorname{Cos}x)_x]\,.\,\partial y_x = o$, welcher Gleichung Genüge geschieht, wenn $\partial y_x = o$, also $y = \text{Const.}$ ist, welches Resultat der Aufgabe nicht entspricht, und auch wenn

8) $P\,.\,\partial(z\operatorname{Cos}u)_x + Q\,.\,\partial(y\operatorname{Cos}x)_x = o$ ist, woraus die verlangte Stammgleichung

9) $P\,z\operatorname{Cos}u + Q\,y\operatorname{Cos}x = \text{Const.}$ hervorgeht.

Ist nun $z = \varphi u$ gegeben, und eliminirt man hieraus, aus 9) und aus $y + z = a$, die Veränderlichen u und z, so erhält man die Gleichung zwischen x und y für die Gleichgewichts-Curve zu $z = \varphi u$.

Beispiele. 1. Sollen beide Curven in A anfangen, ist $z = \varphi u$ ein Quadrant zum Halbmesser r, und liegt der Mittelpunct in der Verticale durch A, so ist $z = 2r\operatorname{Cos}u$, ferner $a = r\sqrt{2}$ und für den ersten Augenblick des Gleichgewichts, wenn Q in A ist, und lothrecht wirken soll, $Q = P\,.\,\sqrt{2}$; substituirt man diese Werthe, so entsteht $y = 2r\sqrt{2}\,.\,[1 - \operatorname{Cos}x] = 4r\sqrt{2}\operatorname{Sin}^2\frac{x}{2}$, welches die Polargleichung für die gewöhnliche Epicycloide ist, (Belidor nannte diese Curve Sinussoide) wenn der beschreibende Punct in der Peripherie des beschreibenden Kreises liegt, und dieser

ſo wie der Grundkreis einerlei Halbmeſſer $r/2$ haben, der epicycloidiſche Bogen aber von dem Punct ab genommen wird, welchen derſelbe mit dem Grundkreis gemeinſchaftlich hat.

2. Sollen beide Curven in A anfangen, $z = \varphi u$ eine gerade Linie, alſo $u = \text{Const}$ ſein, ſo hat man blos die beiden Gleichungen $P z \operatorname{Cos} u + Q y \operatorname{Cos} x = \text{Const}$ und $y + z = a$; woraus $P(a-y)\operatorname{Cos} u + Q y \operatorname{Cos} x = \text{Const}$ folgt.

Für $y = o$ entſpringt hieraus, $\text{Const} = P a \operatorname{Cos} u$ und es bleibt blos $P \operatorname{Cos} u = Q \operatorname{Cos} x$; alſo $\operatorname{Cos} x = \frac{P \operatorname{Cos} u}{Q}$, woraus erhellet, daß die geſuchte Curve eine gerade Linie iſt, welche mit der Verticalen den Winkel x bildet, für welchen $\operatorname{Cos} x = \frac{P \operatorname{Cos} u}{Q}$ iſt.

3. Soll die gegebene Curve $z = \varphi u$ eine gerade Linie ſein, welche die Verticale durch A in der Entfernung b, unterhalb A, ſchneidet, und mit ihr den Winkel γ bildet, ſo geht $z = \varphi u$ über, in $z . \operatorname{Sin}(\gamma - u) = b \operatorname{Sin} \gamma$ und eliminirt man aus dieſer Gleichung, und aus denen beiden

$$z + y = a \text{ und } z \operatorname{Cos} u + \frac{Q}{P} y \operatorname{Cos} x = \frac{\text{Const}}{P} = B ,$$

die Werthe von z und u, ſo entſteht

$$(a-y)^2 \operatorname{Cos}\gamma^2 = \left[B - \frac{Q}{P} y \operatorname{Cos} x\right]^2 - 2b\left[B - \frac{Q}{P} y \operatorname{Cos} x\right] \operatorname{Sin}\gamma^2 + b^2 \operatorname{Sin}\gamma^2 .$$

Für $y = o$ erhält man hieraus, zur Beſtimmung der Const. B die Gleichung

$$a^2 \operatorname{Cos}\gamma^2 = B^2 - 2b B \operatorname{Sin}\gamma^2 + b^2 \operatorname{Sin}\gamma^2$$

und eliminirt man B aus beiden, ſo folgt

$$\left[\operatorname{Cos}\gamma^2 - \frac{Q^2 \operatorname{Cos} x^2}{P^2}\right] y = 2a \operatorname{Cos}\gamma^2 \pm 2 \frac{Q}{P} \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos}\gamma . \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{Sin}\gamma^2}$$

welches die verlangte Gleichung zwiſchen x und y iſt.

Sollen nun x und y zugleich verſchwinden, alſo Q im erſten Augenblick, in A, lothrecht wirken, ſo liefert die gefundene Gleichung

$$a \operatorname{Cos}\gamma \pm \frac{Q}{P} . \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{Sin}\gamma^2} = o ,$$

woraus erhellet, daß nur das untere Zeichen genügen kann, daß also $B = b\,\mathrm{Sin}\gamma^2 + \mathrm{Cos}\gamma\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2}$, und

$$\frac{Q}{P} = \frac{a\,\mathrm{Cos}\gamma}{\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2}}$$ sein muß.

Substituirt man nun diesen Werth für $\frac{P}{Q}$, so erhält man

$$y = 2a\{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2\}\cdot\frac{1 - \mathrm{Cos}x}{a^2\,\mathrm{Sin}x^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2}.$$

Zur Bestimmung der Abscisse des Endpuncts der gefundenen Curve, bezeichne x' den zugehörigen Werth von x, so entspricht diesem Werth von x, $x = b$, also $u = o$ und $y = a - b$; und man erhält

$$\mathrm{Cos}x' = \frac{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2 - b\,\mathrm{Cos}\gamma\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2}}{a(a-b)};$$

folglich die zugehörige Abscisse auf der Verticale, von A herab

$$= \frac{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2 - b\,\mathrm{Cos}\gamma\cdot\sqrt{a^2 - b^2\,\mathrm{Sin}\gamma^2}}{a}.$$

Aufgabe XV.

In 2 Puncten A, B, (Fig. 13.) deren horizontale Entfernung $AC = b$ und deren lothrechte $CB = h$ ist, ist ein schweres vollkommen biegsames Seil von der Länge $AB = a$ $(a > \sqrt{b^2 + h^2}$ gedacht) aufgehangen. Die Curve, welche dieses Seil bilden wird (Kettenlinie), die Spannungen R, Q in den Endpuncten A, B nach den Richtungen der Tangenten in A und B, und die Winkel α und β, welche diese Tangenten nach eingetretenem Gleichgewicht mit der Horizontale bilden werden, zu bestimmen:

I. Bei der Voraussetzung, daß jede Längen-Einheit des Seils das Gewicht p habe.

Wird AC als Achse der Abscissen x angesehen, die Ordinaten y, normal auf x, also lothrecht, gewählt, und bezeichnet u die Seil-Spannung im Endpunct von y, z den Winkel der Tangente in diesem Punct, mit x, und v die Länge des Seils zu x und y, so hat man

1) $\operatorname{tg} z = w = \partial y_x$

2) $\partial v_x^2 = 1 + \partial y_x^2 = 1 + w^2 = \operatorname{Sec} z^2$ und, statischen Gesetzen zufolge

3) $u \operatorname{Cos} z = R \operatorname{Cos} \alpha$.

4) $u \operatorname{Sin} z + pv = R \operatorname{Sin} \alpha$.

Aus 1), 3) und 4) folgt:

5) $w = \operatorname{tg} \alpha - \frac{p}{R \operatorname{Cos} \alpha} . v$; also, nach 2)

6) $\partial w_x = -\frac{p}{R\,Cos\alpha}\cdot\sqrt{1+w^2}$ und hieraus

7) $\partial x_w = -\frac{R\,Cos\alpha}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}$; daher, integrirt

8) $x = -\frac{R\,Cos\alpha}{p}\,ln\,[w+\sqrt{1+w^2}] + Const$, und weil für $x = o$, ſich, w oder tgz, gleich $tg\alpha$ ergiebt,

9) $x = \frac{R\,Cos\alpha}{p}\,ln\,\frac{tg\alpha + Sec\alpha}{tgz + Secz}$.

Aus $w = tgz = \partial y_x = \partial y_w \cdot \partial w_x = -\partial y_w \cdot \frac{p}{R\,Cos\alpha}\cdot\sqrt{1+w^2}$ entſpringt nun auch

10) $\partial y_w = -\frac{R\,Cos\alpha}{p}\cdot\frac{w}{\sqrt{1+w^2}}$; und hieraus

11) $y = -\frac{R\,Cos\alpha}{p}\sqrt{1+w^2} + Const = -\frac{R\,Cos\alpha}{p}\,Secz + Const$,

folglich, weil $z = \alpha$ wird, wenn $y = o$ iſt,

12) $y = \frac{R\,Cos\alpha}{p}\,[Sec\alpha - Secz]$.

Eliminirt man nun z aus 9) und 12), ſo folgt

13) $x = \frac{R\,Cos\alpha}{p}\,ln\,\frac{(1+Sin\alpha)\,R}{R - py + \sqrt{(R-py)^2 - R^2\,Sin\alpha^2}}$.

Die größte Ordinate y′ und zugehörige Abſciſſe x, ergeben ſich nun leicht für $z = o$ aus 12) und 9), nehmlich:

14) $y' = \frac{R}{p}\,(1 - Cos\alpha)$

15) $x' = \frac{R\,Cos\alpha}{p}\,ln\,\frac{1+Sin\alpha}{Cos\alpha} = \frac{R\,Cos\alpha}{p}\,ln\,tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Zur Beſtimmung von R, Q, α, β hat man nun die vier Gleichungen:

16) $Q\,Cos\beta = R\,Cos\alpha$

17) $Q\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,\mathrm{Sin}\,\alpha = pa$

18) $b = \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{p} \ln \frac{\mathrm{Sec}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{Sec}\,\beta - \mathrm{tg}\,\beta}$

19) $h = \frac{R\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{p} [\mathrm{Sec}\,\alpha - \mathrm{Sec}\,\beta]$.

Beispiele. 1. Ist $b = o$, so werden hieraus folgende vier Gleichungen:

$\alpha = \beta$ aus 19);

$Q = R$ aus 16);

$2R\,\mathrm{Sin}\,\alpha = pa$ aus 17); und

$b\,\mathrm{tg}\,\alpha = a . \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; aus 18),

durch welche sich α, β, Q, R bestimmen.

2. Ist y' gegeben, so hat man zur Bestimmung von a, α, β, Q, R die Gleichungen 14), 16), 17), 18), 19).

Ist etwa $b = 20'$; $h = o$; $y' = 8'$ gegeben, so hat man:

$\alpha = \beta$

$Q = R$

$2R\,\mathrm{Sin}\,\alpha = pa$

$20\,\mathrm{tg}\,\alpha = a \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ und

$8 = \frac{R}{p}(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)$; und hieraus

$5 - 5\,\mathrm{Cos}\,\alpha - 4\,\mathrm{Cos}\,\alpha \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = o$.

Dieser letzteren Gleichung entspricht nahe $\alpha = 61\frac{1}{2}°$; und dann hat man auch $a = 27'$; und dann $R = Q = 15{,}3 . p$.

II. Bei der Voraussetzung, daß jede Längen-Einheit der horizontalen Projection von a, das Gewicht p habe: (wie bei Kettenbrücken).

In diesem Fall hat man die Gleichungen:

1) $\partial y_x = \mathrm{tg}\,z$;

2) $u \operatorname{Cos} z = R \operatorname{Cos} \alpha$;

3) $u \operatorname{Sin} z + px = R \operatorname{Sin} \alpha$ und die Verbindung giebt

4) $\partial y_x = \operatorname{tg} \alpha - \frac{p}{R \operatorname{Cos} \alpha} . x$; woraus

5) $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{p}{2R \operatorname{Cos} \alpha} . x^2$ folgt, so daß also diese Kettenlinie eine Parabel ist.

Aufgabe. XVI.

Ein normales dreiseitiges Prisma, dessen Grundebene, in A (Fig. 14.) rechtwinkliche Dreiecke ABC sind, ruht, mit horizontalen Seitenkanten, mit der Seiten-Ebene zu AC gegen eine verticale Wand, und mit der geneigten Seiten-Ebene zu BC gegen eine eben so geneigte Wand, welche so wie die verticale Wand in unverschiebbar fester Lage gedacht wird. Die Länge AC sei durch h, jede Seitenkante des Prisma durch a, der Winkel ACB durch α, und das Gewicht der körperlichen Einheit des Prisma's durch p bezeichnet. Es wird gesucht:

I. Die mittlere Kraft x sämtlicher Normalpressungen auf die lothrechte Seiten-Wand, an welche die Seiten-Ebene zu AC sich anlehnt, so wie die mittlere Kraft y sämtlicher Normalpressungen aus dem Gewicht des Prisma's, auf die geneigte Seitenwand, auf welcher die Seiten-Ebene BC ruht, und zwar mit Berücksichtigung der Reibungen in AC und BC.

Versteht man unter x, y die den gesuchten Wirkungen gleiche Gegen-Wirkungen der widerstehenden Wände, unter μ den Reibungs-Coefficienten für AC, unter μ' den für die Wand BC, so wirken die Kräfte $\frac{h^2 ap \operatorname{tg}\alpha}{2}$, x, y, μx und $\mu' y$ und zerlegt man dieselben nach lothrechten und horizontalen Richtungen, so ergeben sich, dem vorausgesetzten Gleichgewicht entsprechend, die Bedingungsgleichungen:

1) $\frac{h^2 ap}{2} \operatorname{tg}\alpha = y \operatorname{Sin}\alpha + \mu' y \operatorname{Cos}\alpha + \mu x$;

2) $x + \mu' y \operatorname{Sin}\alpha = y \operatorname{Cos}\alpha$,

aus welchen x und y zu entwickeln sind, ohne die, im allgemeinen erforderliche, Gleichung der Momente zu bedürfen. Es entsteht

$$3)\ x = \frac{aph^2}{2} \cdot \frac{[1-\mu' tg\alpha]tg\alpha}{\mu+\mu'+[1-\mu\mu']tg\alpha} = \frac{aph^2}{2} \cdot \varphi\alpha \text{ und}$$

$$4)\ y = \frac{aph^2}{2} \cdot \frac{Sec\alpha . tg\alpha}{\mu+\mu'+[1-\mu\mu']tg\alpha} = \frac{aph^2}{2} . F\alpha .$$

II. Derjenige Werth von α, für welchen x ein Max. wird. Aus $\partial\varphi\alpha = o$ erhält man den gesuchten Werth, nehmlich

$$Tg\alpha = -\frac{\mu+\mu'}{1-\mu\mu'} + \frac{\sqrt{\mu'(\mu+\mu')(1+\mu'\mu')}}{\mu'(1-\mu\mu')},$$

für welchen $\partial^2\varphi\alpha$ einen negativen Werth annimmt.

III. Der Ort der mittleren Kraft x.

Wird h als veränderlich betrachtet, x als der zu jedem h gehörige Normaldruck, und A als Anfangspunct der verschiedenen Werthe von h, so ist in Beziehung auf A als Momentenpunct, die Summe der Momente aller horizontalen Pressungen

$$= \Sigma[h . dx] = \int_{h \div o} h\partial x_h . dh = \int_{h \div o} h . aph\varphi\alpha . dh = ap\varphi\alpha . \frac{h^3}{3};$$

folglich die Entfernung von A bis zum Mittelpunct aller Wirkungen $= ap\varphi\alpha . \frac{h^3}{3} : \frac{aph^2\varphi\alpha}{2} = \frac{2}{3}h$ und also die Entfernung von C bis zu diesem Punct $= \frac{1}{3}h$.

IV. Die Gewichte P, Q beider Seitenkörper, an deren Seitenwänden in AC und BC das Prisma anliegt, fürs Gleichgewicht mit diesem Prisma, unter der Voraussetzung, daß beide Körper auf horizontalen Ebenen CD, CE ruhen, aber auf ihnen verschiebbar sind, und also nur durch die Reibung auf diesen horizontalen Ebenen dem Verschieben widerstehen.

Bezeichnet μ den Reibungs-Coefficienten, so ist

1) fürs Gleichgewicht zwischen dem Gewicht des Prisma und P;

$$\mu P = x = \frac{aph^2}{2} . \varphi\alpha ; \text{ also}$$

$$P = \frac{aph^2 . \varphi\alpha}{2\mu} .$$

2) Für's Gleichgewicht, zwiſchen dem Gewicht des Prisma's und Q, wenn z die lothrechte Gegenwirkung der horizontalen Ebene CE ausdrückt,

$z = y\,\mathrm{Sin}\alpha + Q$ und $\mu z = y\,\mathrm{Cos}\alpha$; woraus

$z = \frac{aph^2\,\mathrm{Cos}\alpha . F\alpha}{2\mu}$; und $Q = \frac{aph^2(\mathrm{Cos}\alpha - \mu\,\mathrm{Sin}\alpha)F\alpha}{2\mu}$ folgt.

V. Die Stärke CD = u des Körpers vom Gewicht P, wenn derſelbe als ein normales Parallelepipedum, von gleicher Länge a, mit dem dreiſeitigen Prisma, vorausgeſetzt wird, der Bedingung gemäß, daß in Beziehung auf drehende Bewegung um die Seitenkante a durch D, Gleichgewicht ſtatt finde.

Nach I. und III. iſt, wenn q das ſpecifiſche Gewicht von der Materie des Parallelepipedums bezeichnet, die Bedingungsgleichung:

$$x . \frac{h}{3} = P . \frac{u}{2} \text{ oder } 2h\,\frac{aph^2}{2} . \varphi\alpha = 3u . ahuq$$

und hieraus folgt

$$u = h . \sqrt{\frac{p . \varphi\alpha}{3q}} .$$

Der Bedingung in IV. 1) entſprechend, müßte in Hinſicht aufs Gleichgewicht des dreiſeitigen Prisma's mit der Reibung in CD, bei ſo einer normalen parallelepipediſchen Seitenwand,

$$u = h . \frac{p\varphi\alpha}{2\mu q} \text{ ſein},$$

und der größte der beiden Werthe für u wäre alſo im allgemeinen fürs Gleichgewicht erforderlich.

Aufgabe XVII.

Aufgabe. Für die gewöhnliche Cycloide, den normalen Coordinaten x, y zugehörig, die Länge a des Bogens, den Inhalt e der Ebene; die Fläche f des Umdrehungs-Körpers und den Inhalt k dieses Körpers selbst, ferner die Momente m dieser Gegenstände, für gegebene Achsen und Ebenen, gleichförmig vertheilte Schwere vorausgesetzt, und die zugehörigen Hebelsarme h, zu bestimmen.

Auflösung. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises sei $= r$; AB (Fig. 15.) $= 2r$; BC $= r\pi$; ABC $= 90°$; ferner sei AD $\parallel$ BC; CD $\parallel$ BA; der Wälzungswinkel zum Bogen AE sei $= \alpha$, und A, E, F, K, M, H bedeute dasjenige, was aus a, e, f, k, m, h wird, wenn α den bestimmten Werth π annimmt.

1) Bestimmung von AE $=$ a.

Es ist $x = r - r\,\mathrm{Cos}\,\alpha$; $y = r\alpha + r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ und

$$a = \int \sqrt{1 + \partial y_x^{\,2}}\, dx = \int \sqrt{\partial x_\alpha^{\,2} + \partial y_\alpha^{\,2}}\, d\alpha$$

$$= r\sqrt{2} \int \sqrt{1 + \mathrm{Cos}\,\alpha}\,.\,d\alpha;\ \text{oder } \alpha = 2\beta \text{ gesetzt,}$$

$$a = 4r \int \mathrm{Cos}\,\beta\, d\beta;\ \text{folglich } a = 4r\,\mathrm{Sin}\,\beta + C;\ \text{oder}$$

$$a = 4r\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2};\ \text{also } A = 4r.$$

2) Bestimmung des Momentes m von a für die Achse AB.

Es ist $m = \int y . \sqrt{1+\partial y_x^2}\, dx = 8r^2 \int [\beta + \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta] \operatorname{Cos}\beta\, d\beta$

$= 8r^2 [\beta \operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Cos}\beta - \frac{1}{3}\operatorname{Cos}\beta^3 - \frac{2}{3}]$; und daher

$M = \frac{4}{3}(3\pi - 4) . r^2$;

$h = \frac{m}{a} = \frac{3\beta \operatorname{Sin}\beta + 3\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\beta^3 - 2}{3\operatorname{Sin}\beta} \cdot 2r$

$H = \frac{3\pi - 4}{3} . r$;

und also die Entfernung des Schwerpuncts von CD $= \frac{4}{3}r$.

3) Bestimmung des Momentes m von a für die Achse AD.

Es ist $m = \int x . \sqrt{1+\partial y_x^2}\, dx$

$= \int 8r^2 \operatorname{Sin}\beta^2 . \operatorname{Cos}\beta\, d\beta = \frac{8}{3} r^2 \operatorname{Sin}\beta^3$; also

$M = \frac{8}{3} r^2$; $h = \frac{m}{a} = \frac{8}{3} r \operatorname{Sin}\beta^2$; $H = \frac{8}{3} r$;

und folglich auch die Entfernung des Schwerpunctes von CB $= \frac{4}{3}r$.

4) Bestimmung des Inhalts der Ebene e, von x, y und AE $= a$ begrenzt.

Es ist $e = \int y\, dx = r^2 \int (\alpha + \operatorname{Sin}\alpha) \operatorname{Sin}\alpha\, d\alpha$

$= r^2 [-\alpha \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + \frac{1}{2}\alpha]$

$= \frac{r^2}{2} . [\alpha(1 - 2\operatorname{Cos}\alpha) + \operatorname{Sin}\alpha(2 - \operatorname{Cos}\alpha)]$;

und demnach

$E = \frac{1}{2} r^2 \pi$.

5) Bestimmung des Momentes m für e in Beziehung auf AB.

Es ist $m = \int \frac{1}{2} y^2\, dx = \frac{1}{2} r^3 \int (\alpha + \operatorname{Sin}\alpha)^2 \operatorname{Sin}\alpha\, d\alpha$

$= \frac{1}{2} r^3 \int [\alpha^2 \operatorname{Sin}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha^2 + \operatorname{Sin}\alpha^3]\, d\alpha$

$= \frac{1}{2} r^3 \Big[-\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha$

$+ 2\operatorname{Cos}\alpha + 2[\frac{1}{4}\operatorname{Sin}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha$

$+ \frac{1}{2}\alpha^2] - \frac{1}{3}\operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha - \frac{2}{3}\operatorname{Cos}\alpha \Big] + C$; demnach

$$m = \frac{r^3}{12} \cdot [(1-2\cos\alpha)3\alpha^2 + (2-\cos\alpha)6\alpha\sin\alpha + (3-2\cos\alpha)\sin\alpha^2 - (1-\cos\alpha).8]\,;\ \text{also}$$

$$M = \frac{r^3}{12} \cdot (9\pi^2 - 1)\,;$$

$$h = \frac{r}{6} \cdot \frac{(1-2\cos\alpha)3\alpha^2 + (2-\cos\alpha)6\alpha\sin\alpha + (3-2\cos\alpha)\sin\alpha^2 - 8(1-\cos\alpha)}{(1-2\cos\alpha)\alpha + (2-\cos\alpha)\sin\alpha}\,;$$

$$H = \frac{r}{18} \cdot \frac{9\pi^2 - 16}{\pi}\,,$$

und folglich die Entfernung des Schwerpunctes von CD,

$$= \frac{r}{18} \cdot \frac{9\pi^2 + 16}{\pi}\,.$$

6) Bestimmung des Momentes m der Ebene e für die Momenten-Achse AD.

$$\text{Es ist } m = \int y \,.\, x\,dx = r^3 \int (\alpha + \sin\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha$$

$$= r^3 \int [\alpha\sin\alpha + \sin\alpha^2 - \alpha\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha^2\cos\alpha]\,d\alpha$$

$$= r^3 \left[-\alpha\cos\alpha + \sin\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{8}[-2\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha] - \tfrac{1}{3}\sin\alpha^3\right] + C \text{ oder}$$

$$m = \frac{r^3}{12} \cdot \left[[2 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha]3\alpha + [12 - 9\cos\alpha - 4\sin\alpha^2]\sin\alpha\right]\,;\ \text{also}$$

$$M = \tfrac{7}{4} r^3 \pi\,;$$

$$h = \frac{r}{6} \frac{(2 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha)3\alpha + [12 - 9\cos\alpha - 4\sin\alpha^2]\sin\alpha}{(1-2\cos\alpha)\alpha + (2-\cos\alpha)\sin\alpha}\,;$$

$H = \frac{7}{6} r$ und die Entfernung dieses Schwerpunctes von CB, $= \frac{5}{6} r$.

7) Leicht erhält man nun auch noch folgende Resultate:

a) Länge des Bogens $CE = 4r(1-\sin\beta) = 8r\sin^2\frac{\pi-\alpha}{4}$;

b) Entfernung des Schwerpunctes des Bogens CE von CD

$$= \frac{6\beta\sin\beta + 6\cos\beta - 2\cos\beta^3 - 3\pi\sin\beta}{1-\sin\beta} \cdot \frac{r}{3}\,;$$

c) Entfernung des Schwerpunctes des Bogens CE von CB

$$= [2 - \operatorname{Sin}\beta - \operatorname{Sin}\beta^2] : \tfrac{2}{3} r \ ;$$

d) Ebene $AEG = \frac{r^2}{2}(\alpha - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha)$;

e) Entfernung ihres Schwerpunctes von AB

$$= \frac{3\alpha(\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha) + \operatorname{Sin}\alpha^2 (3 - 4\operatorname{Cos}\alpha) + 8(1 - \operatorname{Cos}\alpha)}{6(\alpha - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha)} . r \ ;$$

f) Entfernung ihres Schwerpunctes von AG

$$= \frac{3\alpha - 3\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha - 2\operatorname{Sin}\alpha^3}{6(\alpha - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha)} . r \ ;$$

g) Ebene $ACD = \frac{1}{2} r^2 \pi$;

h) Entfernung ihres Schwerpunctes von AB

$$= \frac{3\pi^2 + 16}{6\pi} . r \ ;$$

i) Entfernung ihres Schwerpunctes von $AD = \frac{1}{2} r$;

k) Ebene $CEQ = \frac{r^2}{2} . [3(\pi - \alpha) - \operatorname{Sin}\alpha (4 + \operatorname{Cos}\alpha)]$;

l) Entfernung ihres Schwerpunctes von CQ

$$= \frac{15(\pi - \alpha) - \operatorname{Sin}\alpha [24 + 9\operatorname{Cos}\alpha - 2\operatorname{Sin}\alpha^2]}{3(\pi - \alpha) - \operatorname{Sin}\alpha (4 + \operatorname{Cos}\alpha)} . \frac{r}{6} = t \ ;$$

m) Entfernung ihres Schwerpunctes von CP

$$= \frac{r}{6} . \frac{3(\pi - \alpha)[3(\pi - \alpha) - 2\operatorname{Sin}\alpha(4 + \operatorname{Cos}\alpha)] + \operatorname{Cos}\alpha[12 - 9\operatorname{Cos}\alpha - 4\operatorname{Cos}\alpha^2] + 17}{3(\pi - \alpha) - \operatorname{Sin}\alpha (4 + \operatorname{Cos}\alpha)} = t' \ ;$$

n) Ebene $CEP = \frac{r^2}{2} . [(2\operatorname{Cos}\alpha - 1)(\pi - \alpha) + (2 - \operatorname{Cos}\alpha)\operatorname{Sin}\alpha]$;

o) Entfernung ihres Schwerpunctes von CQ, wenn $r\pi - y$ durch u und $2r - x$ durch z ausgedrückt wird,

$$= \frac{\frac{1}{2} u z^2 - CEQ . t}{CEP} \ ;$$

p) Entfernung ihres Schwerpunctes von CP

$$= \frac{\frac{1}{2} u^2 z - CEQ . t'}{CEP} .$$

Ist z. B. $x=r$; also $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{\pi+2}{2}.r$; $u=\frac{\pi-2}{2}.r$; und $z=r$, so entsteht

in 1) Bogen $AL=2r\sqrt{2}$;

in 2) der zugehörige Hebelsarm für $AB=\frac{3\pi+10-8\sqrt{2}}{6}.r$;

in 3) — — — — $AD=\frac{1}{2}r$;

in 4) die Ebene $AML=\frac{\pi+4}{4}.r^2$; also Ebene $AIL=r^2$;

in 5) der Hebelsarm von AML für $AB=\frac{3\pi^2+24\pi-20}{\pi+4}.\frac{r}{12}$;

in 6) — — — — — $AD=\frac{3\pi+16}{\pi+4}.\frac{r}{6}$;

dann in 7)

aus a) der Bogen $CL=2r(2-\sqrt{2})$;

aus b) der zugehörige Hebelsarm für $CD=\frac{(10-3\pi)(2+\sqrt{2})}{6}.r$;

aus c) — — — — $CB=\frac{3-\sqrt{2}}{3}.r$;

aus d) die Ebene $ALT=\frac{r^2\pi}{4}$;

aus e) ihr Hebelsarm für $AB=\frac{3\pi^2+44}{12\pi}.r$;

aus f) — — — — $AD=\frac{3\pi-4}{6\pi}.r$;

aus k) die Ebene $CLK=\frac{3\pi-8}{4}.r^2$;

aus l) ihr Hebelsarm für $CB=\frac{15\pi-44}{3\pi-8}.\frac{r}{6}$;

aus m) — — — — $CD=\frac{9\pi^2+68-48\pi}{3\pi-8}.\frac{r}{12}$;

aus n) die Ebene $CLR=\frac{4-\pi}{4}.r^2$;

aus o) ihr Hebelsarm für $CB = \frac{32-9\pi}{4-\pi} \cdot \frac{r}{6}$,

aus p) — — — $CD = \frac{24\pi-3\pi^3-44}{4-\pi} \cdot \frac{r}{12}$.

8) Bestimmung der Fläche f, welche AE bei der Umdrehung um AN erzeugt.

Es ist $f = \int 2\pi y \sqrt{1+\partial y_x^2}\, dx$

$= 16\pi r^2 \int [\beta \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta^2]\, d\beta$

$= \frac{16}{3}\pi r^2 [3\beta \operatorname{Sin}\beta + 3\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\beta^3 - 2]$; und daher

$F = \frac{8}{3}(3\pi-4)\pi . r^2$;

9) Bestimmung des Momentes m der Fläche f in 8) für die Ebene durch A normal auf AB ;

Es ist $m = \int x . 2\pi y . \sqrt{1+\partial y_x^2}\, dx$

$= 32\pi r^3 \int [\beta \operatorname{Sin}\beta^2 \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\beta^3 \operatorname{Cos}\beta^2]\, d\beta$; daher

$m = \frac{32\pi r^3}{45}[15\beta \operatorname{Sin}\beta^3 + (9\operatorname{Sin}\beta^4 + 2\operatorname{Sin}\beta^2 + 4)\operatorname{Cos}\beta - 4]$;

$h = \frac{2r}{15} \cdot \frac{15\beta \operatorname{Sin}\beta^3 + (9\operatorname{Sin}\beta^4 + 2\operatorname{Sin}\beta^2 + 4)\operatorname{Cos}\beta - 4}{3\beta \operatorname{Sin}\beta + (3 - \operatorname{Cos}\beta^2)\operatorname{Cos}\beta - 2}$;

$H = \frac{2r}{15} \cdot \frac{15\pi-8}{3\pi-4}$.

10) Bestimmung der Fläche f, welche AE bei der Umdrehung um AG erzeugt.

Es ist $f = 2\pi \int x . \sqrt{1+\partial x_y^2}\, dy = 16\pi r^2 \int \operatorname{Sin}\beta^2 \operatorname{Cos}\beta\, d\beta$

$= \frac{16}{3}\pi r^2 \operatorname{Sin}\beta^3$; und daher $F = \frac{16}{3}\pi . r^2$.

11) Bestimmung des Momentes m der Fläche f in 10) für die Ebene durch A normal auf AD.

Es ist $m = \int y . 2\pi x \sqrt{1+\partial x^2} . dy = \int 2\pi xy \sqrt{1+\partial y_x^2}\, dx$

also wie in 9);

$m = \frac{32\pi r^3}{45}[15\beta \operatorname{Sin}\beta^3 + (9\operatorname{Sin}\beta^4 + 2\operatorname{Sin}\beta^2 + 4)\operatorname{Cos}\beta - 4]$; dann

$h = \frac{2r}{15} \cdot \frac{15\beta \operatorname{Sin}\beta^3 + (9\operatorname{Sin}\beta^4 + 2\operatorname{Sin}\beta^2 + 4)\operatorname{Cos}\beta - 4}{\operatorname{Sin}\beta^3}$;

$H = \frac{15\pi - 8}{15} r$; und also die Entfernung dieses Schwerpunctes von der Grundebene $= \frac{8}{15} . r$.

12) Bestimmung der Fläche f, welche CE bei der Umdrehung um CB erzeugt.

Es ist $f = \int 2\pi z . \sqrt{1+\partial z_u^2}\, du$ und $z = r(1+\operatorname{Cos}\alpha)$;

$u = r(\pi - \alpha - \operatorname{Sin}\alpha)$; also $\partial z_\alpha = -\operatorname{Sin}\alpha$ und $\partial u_\alpha = -r(1 \quad \operatorname{Cos}\alpha)$,

folglich $f = -2\pi r^2 \int (1+\operatorname{Cos}\alpha) . \sqrt{2+2\operatorname{Cos}\alpha} . d\alpha$

$= -16\pi r^2 \int \operatorname{Cos}\beta^3 d\beta$

$= \frac{16\pi r^2}{3} . [2 - \operatorname{Sin}\beta(2+\operatorname{Cos}\beta^2)]$ und demnach

$F = \frac{32}{3}\pi r^2$, also gerade doppelt so groß als F in 10).

13) Bestimmung des Momentes m der Fläche f in 12) für die Ebene durch C, normal auf CB.

Es ist $m = \int u . 2\pi z . \sqrt{1+\partial z_u^2} . du$ al o, wie in 12);

$m = 16\pi r^3 \int [-\pi \operatorname{Cos}\beta^3 + 2\beta \operatorname{Cos}\beta^3 + 2 \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta^4]\, d\beta$

$= 16\pi r^3 \left[-\pi[\tfrac{1}{3}\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta^2 + \tfrac{2}{3}\operatorname{Sin}\beta] + 2[\tfrac{1}{6}\operatorname{Cos}\beta^3 + \tfrac{1}{3}\beta \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta^2 + \tfrac{2}{3}\operatorname{Cos}\beta + \tfrac{2}{3}\beta \operatorname{Sin}\beta] - \tfrac{2}{5}\operatorname{Cos}\beta^5\right] + C$

$= \frac{16\pi r^3}{45} . [2\operatorname{Cos}\beta[30 + 5\operatorname{Cos}\beta^2 - 9\operatorname{Cos}\beta^4] - 15(\pi - 2\beta) \times \operatorname{Sin}\beta(2+\operatorname{Cos}\beta^2)]$;

$$h=\frac{r}{15}\cdot\frac{2\cos\beta[30+5\cos\beta^2-9\cos\beta^4]-15(\pi-2\beta)\sin\beta(7+\cos\beta^2)}{2-\sin\beta[2+\cos\beta^2]};$$

$$H=\frac{26}{15}\cdot r.$$

14) Bestimmung der Fläche f, welche CE bei der Umdrehung um CP erzeugt.

Es ist $f=\int 2\pi u\cdot\sqrt{1+\partial u_z^2}\,dz$

$$=8\pi r^2\int[-\pi\cos\beta+2\beta\cos\beta+2\sin\beta\cos\beta^2]\,d\beta$$

$$=\frac{8\pi r^2}{3}[2\cos\beta(3-\cos\beta^2)-(\pi-2\beta)3\sin\beta];\text{ daher}$$

$$F=\frac{32\pi r^2}{3},\text{ also genau so groß wie die in 12);}$$

15) Bestimmung des Momentes m der Fläche f in 14) für die Momenten-Ebene durch C normal auf CD.

Es ist $m=\int z.2\pi u\sqrt{1+\partial u_z^2}\,dz$

$$=\int 2\pi uz.\sqrt{1+\partial z_u^2}\,du,$$

welcher Ausdruck vollkommen mit dem in 13) übereinstimmt, so daß m, h und H genau wie in 13) bleiben.

16) Ist z. B. wie in 7) $x=r$, so entspringt

aus 8) $f=\frac{2\pi r^2}{3}[3\pi+10)\sqrt{2}-16];$

aus 9) $h=\frac{r}{15}\cdot\frac{15\pi+58-32.\sqrt{2}}{3\pi+10-8\sqrt{2}};$

aus 10) $f=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi.r^2;$

aus 11) $h=\frac{r}{30}.[15\pi+58-32\sqrt{2}];$

aus 12) $f=\frac{4}{3}\pi(8-5\sqrt{2})r^2;$

aus 13) $h=\frac{r}{30}\cdot\frac{242-75\pi}{4\sqrt{2}-5};$

aus 14) $f = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{10-3\pi}{4} \cdot r^2\pi$;

aus 15) $h = \frac{r}{30} \cdot \frac{242-75\pi}{4\sqrt{2}-5}$.

17) Bestimmung des Körpers k, welchen die Ebene ANE bei der Umdrehung um AN erzeugt.

Es ist $k = \pi \int y^2\,dx = r^3\pi \cdot \int [\alpha + \operatorname{Sin}\alpha]^2 \operatorname{Sin}\alpha\,d\alpha$

$= r^3\pi \cdot \int [\alpha^2 \operatorname{Sin}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha^2 + \operatorname{Sin}\alpha^3]\,d\alpha$

$= r^3\pi \cdot \left\{ \begin{matrix} -\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha + 2\operatorname{Cos}\alpha \\ +\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha^2 - \alpha \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \\ -\frac{1}{3}\operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha - \frac{2}{3}\operatorname{Cos}\alpha \end{matrix} \right\} + \text{Const. oder}$

$k = \frac{r^3\pi}{6}[3\alpha^2(1-2\operatorname{Cos}\alpha) + 6\alpha \operatorname{Sin}\alpha(2-\operatorname{Cos}\alpha)$

$+ \operatorname{Sin}\alpha^2(3-2\operatorname{Cos}\alpha) - 8(1-\operatorname{Cos}\alpha)]$; und hieraus

$K = \frac{r^3\pi}{6}(9\pi^2 - 16)$,

wie auch aus der Guldinischen Regel aus 4) und 5) hervorgeht.

18) Bestimmung des Momentes m vom Körper k in 17) für die Ebene durch A normal auf AB.

Es ist $m = \int x \cdot y^2 \pi\,dx$

$= r^4\pi \cdot \int [\alpha^2 \operatorname{Sin}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha^2 + \operatorname{Sin}\alpha^3][1-\operatorname{Cos}\alpha]\,d\alpha$

$= r^4\pi \int [\alpha^2 \operatorname{Sin}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha^2 + \operatorname{Sin}\alpha^3 - \alpha^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha$

$- 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha - \operatorname{Sin}\alpha^3 \operatorname{Cos}\alpha] \cdot d\alpha$

$= r^4\pi \cdot \left\{ \begin{matrix} -\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha + 2\alpha \operatorname{Sin}\alpha + 2\operatorname{Cos}\alpha \\ +\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha^2 - \alpha \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \\ -\frac{1}{3}\operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha - \frac{2}{3}\operatorname{Cos}\alpha \\ +\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha - \frac{1}{8}\operatorname{Cos}2\alpha \\ -\frac{2}{3}\alpha \operatorname{Sin}\alpha^3 - \frac{2}{9}\operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Cos}\alpha - \frac{4}{9}\operatorname{Cos}\alpha \\ -\frac{1}{4}\operatorname{Sin}\alpha^4 \end{matrix} \right\} + C$

und reducirt

$$m=\frac{r^4\pi}{36}\cdot\left\{\begin{array}{l}9\alpha^2[1-4\mathrm{Cos}\alpha+2\mathrm{Cos}\alpha^2]+6\alpha\,\mathrm{Sin}\alpha[8-9\mathrm{Cos}\alpha\\ \qquad\qquad +4\mathrm{Cos}\alpha^2]\\ +\mathrm{Cos}\alpha.[12-9\mathrm{Cos}\alpha+20\mathrm{Cos}\alpha^2-8\mathrm{Cos}\alpha^3]-14\end{array}\right\}$$

folglich

$$h=\frac{m}{k}\text{ (den Werth für k aus 17) genommen);}$$

$$H=\frac{r}{6}\cdot\frac{63\pi^2-64}{9\pi^2+16}.$$

19) Bestimmung des Körpers k, welchen die Ebene AEG bei der Umdrehung um AG erzeugt.

Es ist $k=\int\pi x^2\,dx=\pi r^3\int(1-\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Cos}\alpha^2+\mathrm{Cos}\alpha^3)\,d\alpha$

$$=\frac{\pi r^3}{6}[3\alpha-\mathrm{Sin}\alpha(2+3\,\mathrm{Cos}\alpha-2\mathrm{Cos}\alpha^2)]\text{ und also}$$

$K=\frac{1}{2}r^3\pi^2=$ dem achten Theil des Products aus Grundebene in Höhe.

20) Bestimmung des Momentes m des Körpers k in 19) für die Ebene durch A normal auf AD.

Es ist $m=\int y\,k^2\,dy=\pi r^4\int(\alpha\mathrm{Sin}\alpha^2+\alpha\mathrm{Sin}\alpha^2\mathrm{Cos}\alpha$

$$+\mathrm{Sin}\alpha^3-\mathrm{Sin}\alpha^3\mathrm{Cos}\alpha)\,d\alpha$$

$$=\frac{\pi r^4}{36}.[9\alpha^2-6\alpha\,\mathrm{Sin}\alpha(2+3\,\mathrm{Cos}\alpha-2\mathrm{Cos}\alpha^2)$$

$$-\mathrm{Cos}\alpha[48-9\,\mathrm{Cos}\alpha-16\,\mathrm{Cos}\alpha^2+9\,\mathrm{Cos}\alpha^3]+32];\text{ also}$$

$$h=\frac{m}{k}\text{ (den Werth für k aus 19) genommen);}$$

$$H=r.\frac{9\pi^2+64}{18\pi}.$$

21) Bestimmung des Inhalts k des Körpers, welchen die Ebene CQE bei der Umdrehung um CQ erzeugt.

Es ist $k=\int\pi.z^2\,du=-\pi r^3\int(1+\mathrm{Cos}\alpha)^3\,d\alpha$

$$=\frac{\pi r^3}{6}[15(\pi-\alpha)-\mathrm{Sin}\alpha(22+9\mathrm{Cos}\alpha+2\mathrm{Cos}\alpha^2)];\text{ also}$$

$k=\frac{5}{12}\pi^2.r^3=\frac{5}{8}$ des Products aus Grundebene in Höhe.

22) Bestimmung des Momentes m des Körpers k in 21) für die Ebene durch C normal auf CB.

Es ist $m = \int u . \pi . z^2 \, du$

$= -\pi r^4 \int (1+\cos\alpha)^3 . [\pi - \alpha - \sin\alpha] d\alpha$ und hieraus nach ausgeführter Integration und Constanten-Bestimmung

$$m = \frac{\pi r^4}{36} . \left[45(\pi-\alpha)^3 - 6(\pi-\alpha)\sin\alpha[22+9\cos\alpha+2\cos\alpha^2] + \cos\alpha(96-27\cos\alpha-32\cos\alpha^2-9\cos\alpha^3]+400\right]$$

$h = \frac{m}{k}$ (den Werth für k aus 21) genommen)

$H = r . \frac{45\pi^2+128}{90\pi}$.

23) Bestimmung des Inhaltes k des Körpers, welchen die Ebene CEP bei der Umdrehung um CP erzeugt.

Es ist $k = \int \pi u^2 \, dz$

$= -\pi r^3 \int [\pi - \alpha - \sin\alpha]^2 \sin\alpha \, d\alpha$

$= \pi r^3 \int [-\pi^2 \sin\alpha + 2\pi\alpha \sin\alpha - \alpha^2 \sin\alpha + 2\pi \sin\alpha^2 - 2\alpha \sin\alpha^2 - \sin\alpha^3] d\alpha$ und hieraus

$$k = \frac{\pi r^3}{6} \left[3(\pi-\alpha)^2(2\cos\alpha-1)+6(\pi-\alpha)\sin\alpha(2-\cos\alpha) - \cos\alpha[6-3\cos\alpha+2\cos\alpha^2]-11\right]$$; folglich

$K = \pi r^3 . \frac{3\pi^2-16}{6}$.

24) Bestimmung des Momentes m des Körpers k in 23) für die Ebene durch C, normal auf CD.

Es ist $m = \int \pi u^2 . z \, dz$

$= -\pi r^4 \int [\pi - \alpha - \sin\alpha]^2 \sin\alpha (1+\cos\alpha) \, d\alpha$

und hieraus (wobei 23) zu benutzen ist)

$$m = \frac{\pi r^4}{36}\Big[9(\pi-\alpha)^2[-3+4\cos\alpha+2\cos\alpha^2]+6(\pi-\alpha)\sin\alpha \times [16-3\cos\alpha-4\cos\alpha^2]-\cos\alpha[60-27\cos\alpha+4\cos\alpha^2 +9\cos\alpha^3]-82\Big];$$ also

$h = \frac{m}{k}$ (den Werth für k aus 23) genommen); und

$$H = \frac{r}{6}\cdot\frac{27\pi^3-128}{3\pi^2-16}.$$

25) Ist z. B. wie in 7) und 16) $x = r$, so entspringt

aus 17) $k = \frac{r^3\pi}{24}[3\pi^2+24\pi-20]$;

aus 18) $h = \frac{r}{6}\cdot\frac{9\pi^2+96\pi-56}{3\pi^2+24\pi-20}$;

aus 19) $k = \frac{r^3\pi}{12}(3\pi-4)$;

aus 20) $h = \frac{r}{12}\cdot\frac{9\pi^2-24\pi+128}{3\pi-4}$;

aus 21) $k = \frac{r^3\pi}{12}(15\pi-44)$;

aus 22) $h = \frac{r}{12}\cdot\frac{45\pi^2-264\pi+400}{15\pi-44}$;

aus 23) $k = \frac{r^3\pi}{24}[-3\pi^2+24\pi-44]$;

aus 24) $h = \frac{r}{6}\cdot\frac{-27\pi^2+192\pi-328}{-3\pi^2+24\pi-44}$.

Aufgabe XVIII.

Auf der Ebene eines rechtwinklichen Parallelogramms ABCD (Fig. 16) sind in 3 dieser Eckpuncte, in B, C, D die Normalen $BE = o$, $CG = h$ und $DH = k$ errichtet, dann die geraden Linien AE, EG, GH und AH gezogen, und jeder Punct L in AE mit demjenigen N in HG durch eine gerade Linie LN verbunden, für welchen sich $AL : AE = HN : HG$ verhält, so daß alle so construirten Linien, deren erste AH und deren letzte EG ist, die (windschiefe) Fläche AEGH bilden; den Inhalt F dieser Fläche so wie auch den körperlichen Inhalt k des begrenzten prismatischen Körpers, und den Ort seines Schwerpunctes durch $AB = a$; $BC = b$ und o, h und k auszudrücken.

I. Bestimmung von F. (Diese Aufgabe ist als ein besonderer vierter Fall zur Aufgabe V. anzusehen).

Construirt man die Normalen LK und NI aus L und N auf AB und DC und aus dem beliebigen Punct P in LN, die PM auf KI, setzt $AK = x$, $KM = y$ und $MP = z$, so ist $F = \int^2 \sqrt{1 + \partial z_x^{\,2} + \partial z_y^{\,2}}\, dx.dy$, und, um z als Function von x und y auszudrücken, eliminire man aus den 3 Gleichungen:

1) $x : KL = a : o$

2) $x : NI - k = a : h - k$ und

3) $y : z - KL = b : NI - KL$ die Werthe für KL, NI, und z, so erhält man:

4) $KL = \frac{o}{a} x$

5) $NI = k + \frac{b-k}{a}x$

6) $z = \frac{c}{a}x + \frac{k}{b}y + \frac{b-c-k}{ab}xy$, oder

7) $\frac{c}{a}$ durch p

8) $\frac{k}{b}$ durch q

9) $\frac{b-c-k}{ab}$ durch r bezeichnet,

10) $z = px + qy + rxy$; alſo

11) $\partial z_x = p + ry$ und

12) $\partial z_y = q + rx$. Es iſt daher

13) $F = \int^2 \sqrt{1+(q+rx)^2+(p+ry)^2}.dx.dy$; oder

14) $q + rx = x'$.

15) $p + ry = y'$ geſetzt,

16) $F = \frac{1}{r^2}\int^2 \sqrt{1+x'^2+y'^2}.dx'.dy'$.

Nimmt man dieſes Integral zuerſt nach y', zwiſchen den Grenzen $y = b$ und $y = o$; d. h. $y' = p + rb$ und $y' = p$; und dann nach x' zwiſchen $x = a$ und $x = o$, d. h. $x' = q + ra$ und $x' = q$; ſo erhält man den verlangten Werth von F. Es entſteht

17) $F = \frac{1}{2r^2}\int\left[y'.\sqrt{1+x'^2+y'^2}+(1+x'^2)\times \ln\left[y'+\sqrt{1+x'^2+y'^2}\right]\right]dx'$; alſo

18) $F = \frac{1}{2r^2}\left[(p+rb)\int\sqrt{1+(p+rb)^2+x'^2}\,dx' - p\int\sqrt{1+p^2+x'^2}.dx' + \int(1+x'^2)\ln[p+rb + \sqrt{1+(p+rb)^2+x'^2}]dx' - \int(1+x'^2)\ln[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}.dx']\right]$.

Nun iſt aber

19) $\int\sqrt{1+p^2+x'^2}.dx' = \frac{1}{2}\left[x'.\sqrt{1+p^2+x'^2} + (1+p^2)\ln[x'+\sqrt{1+p^2+x'^2}]\right]$; alſo

20) $\int_{q+ra\div q}\sqrt{1+p^2+x'^2}.dx' = \frac{1}{2}\Big[(q+ra)\sqrt{1+p^2+(q+ra)^2}$

$-q\sqrt{1+p^2+q^2}+(1+p^2)\ln\frac{(q+ra)+\sqrt{1+p^2+(q+ra)^2}}{q+\sqrt{1+p^2+q^2}}\Big]$;

und eben so, wenn p+rb für b geschrieben wird;

21) $\int_{q+ra\div q}\sqrt{1+(p+rb)^2+x'^2}.dx'$

$=\frac{1}{2}\Big[(q+ra)\sqrt{1+(p+rb)^2+(q+ra)^2}-q\sqrt{1+(p+rb)^2+q^2}$

$+[1+(p+rb)^2]\ln\frac{q+ra+\sqrt{1+(p+rb)^2+(q+ra)^2}}{q+\sqrt{1+(p+rb)^2+q^2}}\Big]$; dann

22) $P'=\int(1+x'^2)\ln(p+\sqrt{1+p^2+x'^2})\,dx'$

$=\frac{1}{3}\int\ln(p+\sqrt{1+p^2+x'^2}).\partial(3x'+x'^3)_{x'}$

$=\frac{1}{3}\Big[[3x'+x'^3]\ln[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}]$

$-\int(3x'+x'^3).\frac{x'dx'}{\sqrt{1+p^2+x'^2}[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}]}\Big]$

und, weil $\frac{1}{R(p+R)}=\frac{1}{p}\Big[\frac{1}{R}-\frac{1}{p+R}\Big]$ ist,

23) $Q'=\int\frac{[3x'+x'^3]x'dx'}{\sqrt{1+p^2+x'^2}[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}]}$

$=\frac{1}{p}\Big[\int\frac{[3x'+x'^3]x'dx'}{\sqrt{1+p^2+x'^2}}-\int\frac{[3x'+x'^3]x'dx'}{p+\sqrt{1+p^2+x'^2}}\Big]$.

Setzt man nun in

24) $S=\int\frac{[3x'+x'^3]x'dx'}{\sqrt{1+p^2+x'^2}}$; für $\frac{x'}{\sqrt{1+p^2+x'^2}}$ den Buchstaben v, so entsteht

25) $S=(1+p^2)\int\frac{3v^2+(p^2-2)v^4}{[1-v^2]^3}.dv$;

und hieraus, durch Zerlegung in Partialbrüche

26) $S=(1+p^2)\Big[(1+p^2)\int\frac{\partial v}{(1-v^2)^3}$

$-(2p^2+1)\int\frac{\partial v}{(1-v^2)^2}+(p^2+2)\int\frac{\partial v}{1-v^2}\Big]$, woraus

27) $$S=\frac{1+p^2}{16}\left[\frac{3(1+p^2)v}{(1-v^2)^2}+\frac{2[7-5p^2]v}{1-v^2}\right.$$
$$\left.+3(p^2-3)\ln\frac{v+1}{v-1}\right]$$

oder, nach Einführung des Werthes für v,

28) $$S=\frac{[9-3p^2+2x'^2]x'\sqrt{1+p^2+x'^2}}{8}$$
$$+\frac{3(p^2+1)(p^2-3)}{8}\ln[x'+\sqrt{1+p^2+x'^2}]$$ sich ergiebt.

Setzt man ferner in

29) $$T=\int\frac{[8x'+x'^3]dx'}{p+\sqrt{1+p^2+x'^2}}$$, für $p+\sqrt{1+p^2+x'^2}$

den Buchstaben w, so entsteht

30) $$T=\int w^2\sqrt{-1-2pw+w^2}\,dw$$
$$-3p\int w\sqrt{-1-2pw+w^2}\,dw$$
$$+2(p^2+1)\int\sqrt{-1-2pw+w^2}\,dw$$
$$+2p\int\frac{\sqrt{-1-2pw+w^2}}{w}\,dw$$

und hieraus folgt, nach Anwendung der gehörigen Integralformeln

31) $$T=\frac{-61p-3p^3+[21+31p^2]w-26pw^2+6w^3}{24}\cdot$$
$$\sqrt{-1-2pw+w^2}+2p\,\text{Arctg}\frac{\sqrt{-1-2pw+w^2}}{1+pw}$$
$$+\frac{6p^2-p^4+9}{8}\ln[w-p+\sqrt{-1-2pw+w^2}]$$

oder, den Werth für w wieder eingeführt,

32) $$T=-\frac{p}{3}[6x'+x'^3]+\frac{x'}{8}[9+p^2+2x'^2]\sqrt{1+p^2+x'^2}$$
$$+2p\,\text{Arctg}\frac{x'}{1+p[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}]}$$
$$+\frac{6p^2-p^4+9}{8}\ln[x'+\sqrt{1+p^2+x'^2}]$$

Es ist also, wenn die Werthe für S und T aus 28) und 32) in 23) gesetzt werden,

$$33)\ Q' = \frac{x'}{3}(6+x'^2) - \frac{px'}{2}\sqrt{1+p^2+x'^2}$$

$$-2\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{x'}{1+p^2+p\sqrt{1+p^2+x'^2}} + \frac{p}{2}(p^2-3)\ln[x'+\sqrt{1+p^2+x'^2}]$$

und daher aus 22)

$$34)\ F' = \frac{x'}{3}(3+x'^2)\ln[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}] - \frac{x'}{9}(6+x'^2)$$

$$+\frac{px'}{6}\sqrt{1+p^2+x'^2} + \frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\frac{x'}{1+p^2+p\sqrt{1+p^2+x'^2}}$$

$$-\frac{p}{6}(p^2-3)\ln[x'+\sqrt{1+p^2+x'^2}]\,;\ \text{also}$$

$$35)\ \int_{q+ra\div q}[1+x'^2]\ln[p+\sqrt{1+p^2+x'^2}]\,dx' = \frac{q}{9}(6+q^2)$$

$$-\frac{q+ra}{9}[6+(q+ra)^2] + \frac{p(q+ra)}{6}\sqrt{1+p^2+(q+ra)^2}$$

$$-\frac{pq}{6}\sqrt{1+p^2+q^2} + \frac{q+ra}{3}[3+(q+ra)^2]\ln[p+\sqrt{1+p^2+(q+ra)^2}]$$

$$-\frac{q}{3}(3+q^2)\ln[p+\sqrt{1+p^2+q^2}]$$

$$-\frac{p}{6}[p^2-3]\ln\frac{q+ra+\sqrt{1+p^2+(q+ra)^2}}{q+\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$+\frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\frac{q+ra}{1+p^2+p\sqrt{1+p^2+(q+ra)^2}}$$

$$-\frac{2}{3}\mathrm{Arc\,tg}\frac{q}{1+p^2+p\sqrt{1+p^2+q^2}}\,;\ \text{und dann}$$

$$36)\ \int_{q+ra\div q}[1+x'^2]\ln[p+rb+\sqrt{1+(p+rb)^2+x'^2}]\,dx'$$

gleich demselben Ausdruck, wie in 35), wenn durchaus für p die Summe p+rb geschrieben wird.

Werden nun die Werthe aus 20), 21), 35) und 36) in 18) substituirt, so erhält man den verlangten Inhalt F der windschiefen

Fläche AEGH. Zur beſſern Ueberſicht des zuſammengeſetzten Reſultats, bezeichne

α den Winkel von AE gegen AB;
α' den gegenüberliegenden Winkel von HG gegen DC
β den von AH gegen AD und
β' den gegenüberliegenden von EG gegen BC, ſo hat man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a} = p$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b-k}{a} = \frac{c}{a} + \frac{h-c-k}{a} = p + rb \text{ aus } 9;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k}{b} = q \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{h-c}{b} = \frac{k}{b} + \frac{h-c-k}{b} = q + ra$$

und da aus dieſen vier Gleichungen die Werthe der Winkel α, α', β, β' durch a, b, c, h, k beſtimmt ſind, ſo ergiebt ſich dann, durch dieſe Winkel ausgedrückt, aus 18),

$$37)\quad F = \frac{a^2 b^2}{6(h-c-k)^2} \cdot \Big[2\operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\beta' \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha' + \operatorname{tg}^2\beta'}$$

$$+ 2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta} - 2\operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\beta' \cdot \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha' + \operatorname{tg}^2\beta}$$

$$- 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta' \cdot \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta'}$$

$$+ (3 + \operatorname{tg}^2\alpha') \operatorname{tg}\alpha' \ln \frac{\operatorname{tg}\beta' + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\beta' + \operatorname{tg}^2\alpha'}}{\operatorname{tg}\beta + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha'}}$$

$$- (3 + \operatorname{tg}^2\alpha) \operatorname{tg}\alpha \ln \frac{\operatorname{tg}\beta' + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\beta' + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\beta + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\beta + \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$+ \operatorname{tg}\beta' [3 + \operatorname{tg}^2\beta'] \ln \frac{\operatorname{tg}\alpha' + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha' + \operatorname{tg}^2\beta'}}{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta'}}$$

$$- \operatorname{tg}\beta [3 + \operatorname{tg}^2\beta] \ln \frac{\operatorname{tg}\alpha' + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha' + \operatorname{tg}^2\beta}}{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

$$+ 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{Sec}^2\alpha' + \operatorname{tg}\alpha' \sqrt{\operatorname{Sec}^2\alpha' + \operatorname{tg}^2\beta'}}$$

$$-2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{Sec}^2\alpha'+\mathrm{tg}\,\alpha'\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha'+\mathrm{tg}^2\beta}}$$

$$-2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\beta'}{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta'}}$$

$$+2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}}\Big],$$

in welcher Formel, für die letzten 4 Glieder, auch geschrieben werden kann:

$$2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{Sec}^2\alpha'+\mathrm{tg}\,\alpha'\cdot\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha'+\mathrm{tg}^2\beta}}{\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$-2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{Sec}^2\alpha'+\mathrm{tg}\,\alpha'\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha'+\mathrm{tg}^2\beta'}}{\mathrm{tg}\,\beta'}$$

$$+2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{Sec}\,\alpha^2+\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta'}}{\mathrm{tg}\,\beta'}$$

$$-2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\mathrm{Sec}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}}{\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Beispiele. 1. Ist $c=o$ und $k=o$; und $h=a=b$; oder $a=b=h=c=k$, so entsteht

$$F=\frac{a^2}{3}\left[\sqrt{3}+2\ln[2+\sqrt{3}]-\frac{\pi}{6}\right]=1{,}2808.a^2$$

wie in Aufgabe V.

2. Ist $a=b=c=k$ und $h=o$, so entsteht ebenfalls

$$F=\frac{a^2}{3}.\left[\sqrt{3}+2\ln[2+\sqrt{3}]-\frac{\pi}{6}\right]=1{,}2808.a^2.$$

3. Ist $k=o$; $c=o$; und bezeichnet A^2 die Summe a^2+h^2, B^2 die b^2+h^2 und D^4 die $a^2b^2+(a^2+b^2)h^2$; so entsteht

$$F=\frac{D^2}{3}+\frac{(3a^2+h^2)b^2}{6ah}\ln\frac{ah+D^2}{Ab}+\frac{(3b^2+h^2)a^2}{6bh}\times$$

$$\ln\frac{bh+D^2}{aB}-\frac{a^2b^2}{3h^2}\mathrm{Arctg}\,\frac{h^2}{D^2}.$$

4. Ist $h=c+k$, also AEGH eine Ebene, so ergiebt sich ihr Inhalt F leichter unmittelbar, als aus der allgemeinen

Formel 37). Es ist nehmlich in diesem Fall $\alpha' = \alpha$; $\beta' = \beta$, und $z = x\,tg\alpha + y\,tg\beta$; also $\partial z_x = tg\alpha$; $\partial z_y = tg\beta$; folglich

$$F = \int^2 \sqrt{1 + tg\alpha^2 + tg\beta^2}\,.dx.dy\,;$$ und hieraus

$$F = ab\sqrt{1 + tg\alpha^2 + tg\beta^2}\,;$$

oder auch, wenn λ den Winkel bezeichnet, welchen die Ebene AEGH mit der ABCD bildet, $F\,Cos\lambda = a.b$; es ergiebt sich aber, unter u den Winkel verstanden, welchen AB mit der Durchschnittslinie der Ebene AEGH und ABCD einschließt, der Werth von λ aus den beiden Gleichungen $a\,Sin\,u\,.\,tg\lambda = a\,tg\alpha$. und $b\,Cos\,u\,tg\lambda = b\,tg\beta$; nehmlich

$$Cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}\,;$$ und daher ist

$$F = ab\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}$$ oder auch:

$$F = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2k^2}\,.$$

5. Ist $b = c = h = k = \frac{a}{2}$, so entsteht

$$F = \frac{a^2}{96}[24 + 13\ln 5 + 32\ln 2 - 32\,Arotg\,\tfrac{1}{3}] = 0{,}5917.a^2\,;$$

weil, wie in 1) und 2) nur der spitze Winkel zu nehmen ist, was durch eine Schätzung leicht erhellet.

6. Für $c = o$ erhält man aus der allgemeinen Formel in 37) die Fläche eines windschiefen Daches.

II. Bestimmung von k.

Bezeichnet z' einen veränderlichen Theil von z, so ist $k = \int^3 dx.dy.dz'$, zuerst nach z' zwischen z und o; dann nach y zwischen b und o, und zuletzt nach x, zwischen a und o integrirt. Es entsteht

1) $k = \int^2 z\,dx\,dy = \int^2 (px + qy + rxy)\,dy\,dx$; dann

2) $k = \int [pxy + \frac{1}{2}qy^2 + \frac{1}{2}rxy^2]\,dx$

$= \frac{b}{2}\int [2px + bq + brx]dx$; und zuletzt

3) $k = \frac{b}{2} \cdot [px^2 + bqx + \frac{1}{2}brx^2]$

$= \frac{ab}{4}[2ap + 2bq + abr]$

und hieraus, wenn die Werthe für p, q, r aus I. 7), 8), 9) wieder eingeführt werden,

4) $k = ab \cdot \frac{c+k+h}{4}$.

Beispiele. 1. Für $c = k = o$ entsteht $k = ab \cdot \frac{h}{4}$.

2. Für $b = h = a$ und $c = k = \frac{a}{2}$; also für den halben Cubus erhält man $k = \frac{a^3}{2}$.

III. Bestimmung der Entfernung z_o des Schwerpunctes des Körpers k von der Ebene XY.

Es ist $k.z_o = \int^3 z'.dx.dy.dz'$, die Integration wie in II. ausgeführt. Es entsteht

1) $k.z_o = \frac{1}{2}\int^2 (px+qy+rxy)^2\, dx\, dy$ und hieraus folgt leicht

2) $k.z_o = \frac{ab}{36}[2c^2 + 2k^2 + 2h^2 + ck + 2ch + 2kh]$; also

3) $z_o = \frac{1}{9} \cdot \frac{2c^2 + 2k^2 + 2h^2 + ck + 2ch + 2kh}{c+k+h}$.

Beispiele. 1. Für $c = k = o$; entsteht $z_o = \frac{2}{9}h$.

2. Für $b = h = a$ und $c = k = \frac{a}{2}$; folgt $z_o = \frac{7}{24}a$.

IV. Bestimmung der Entfernung y_o des Schwerpunctes des Körpers vom Inhalt k, von der Ebene XZ.

Es ist $k.y_o = \int^3 y\, dx\, dy\, dz' = \int^2 yz\, dx\, dy$, woraus leicht

$k.y_o = \frac{ab^2}{12}[c + 2k + 2h]$ und also

$y_o = \frac{b}{3} \cdot \frac{c+2k+2h}{c+k+h}$ folgt.

Beispiele. 1. Für $c = k = o$; entsteht $y_o = \frac{2}{3}b$.

2. Für $b = h = a$ und $c = k = \frac{a}{2}$ folgt $y_o = \frac{7}{12}a$.

V. Bestimmung der Entfernung x_0 des Schwerpunctes des Körpers k von der Ebene yz.

Hier ist $k.x_0 = \int^3 x\,dx\,dy\,dz'$, woraus

$x_0 = \frac{a}{3}.\frac{2c+k+2h}{c+k+h}$ und in den beiden besondern Fällen

$x_0 = \frac{2}{3}a$; und $x_0 = \frac{7}{11}a$ hervorgehet.

Aufgabe XIX.

Es sei ABC (Fig. 17.) ein sphärisches Dreieck, von Bogen größter Kreise auf einer Kugelfläche zum Halbmesser $OA = OB = OC = r$ gebildet; es wird gesucht:

I. Der Flächenraum F dieses spärischen Dreiecks.

Bezeichnen a, b, c die 3 Seiten des sphärischen Dreiecks, also die Winkel AOB, AOC, BOC, ferner ab, ac, bc die Winkel, welche die Ebenen AOB und AOC, AOB und BOC, und AOC und BOC mit einander bilden; $AOE = \alpha$ einen veränderlichen Theil des Winkels $AOD = \varrho$ und β den Winkel, welchen diese Ebene AOD mit AOB bildet; so ist

1) $F = r^2 \int\int \mathrm{Sin}\alpha \, d\alpha \, d\beta$. Ist die Integration zuerst nach α ausgeführt, und zwischen den Grenzen $\alpha = \varrho$ und $\alpha = 0$ genommen, so ist dann ϱ eine Function von β, der sphärisch-trigonometrischen Gleichung:

2) $\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cotg}\,\varrho = \mathrm{Cotg}\,ac\,\mathrm{Sin}\,\beta + \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,\beta$ entsprechend, und wird dann die zweite Integration nach β vollzogen und das Resultat zwischen den Grenzen $\beta = ab$ und $\beta = 0$ genommen, so hat man den Werth für F. Die Ausführung giebt

$$F = r^2 \int [-\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Const}]\, d\beta \text{ oder}$$

3) $$F = r^2 \int [1 - \mathrm{Cos}\,\varrho]\, d\beta = r^2\beta - r^2 \int \mathrm{Cos}\,\varrho \, d\beta.$$

Setzt man nun $\mathrm{Cotg}\,\varrho = n\,\mathrm{Sin}[\gamma + \beta]$, so daß also

$$n\,\mathrm{Sin}\gamma = \frac{\mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Sin}\,a} \text{ und } n\,\mathrm{Cos}\gamma = \frac{\mathrm{Cotg}\,ac}{\mathrm{Sin}\,a}\text{; folglich}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{Cos} a}{\operatorname{Cotg} ac}\ ;\ n^2 = \frac{\operatorname{Cos} a^2 + \operatorname{Cotg} ac^2}{\operatorname{Sin} a^2} \text{ und daher}$$

$$\sqrt{1+n^2} = p = \frac{1}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} ac} \text{ ist, so folgt:}$$

$$\int \operatorname{Cos}\varrho\, d\beta = \int \frac{\operatorname{Cotg}\varrho}{\operatorname{Cosec}.\varrho} d\beta = \int \frac{n \operatorname{Sin}(\gamma+\beta)}{\sqrt{1+n^2 \operatorname{Sin}(\gamma+\beta)^2}} d\beta$$

$$= -n \int \frac{\partial \operatorname{Cos}(\gamma+\beta)_\beta}{\sqrt{1+n^2-n^2 \operatorname{Cos}(\gamma+\beta)^2}} = -\operatorname{Arc Sin} \frac{n \operatorname{Cos}(\gamma+\beta)}{\sqrt{1+n^2}}$$

und also ist

4) $F = r^2 \left[\beta + \operatorname{Arc Sin} \frac{n \operatorname{Cos}(\gamma+\beta)}{\sqrt{1+n^2}} + C\right]$, oder die Werthe für n und γ substituirt

5) $F = r^2 \left[\beta + \operatorname{Arc Sin} [\operatorname{Cos} ac \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin} ac \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos} a] + C\right]$

also, nach den angegebenen Grenzen genommen,

6) $F = r^2 \left[ab + \operatorname{Arc Sin} [\operatorname{Cos} ac \operatorname{Cos} ab - \operatorname{Sin} ac \operatorname{Sin} ab \operatorname{Cos} a] - \operatorname{Arc Sin} (\operatorname{Cos} ac)\right]$.

Es ist aber, nach einer sphärisch-trigonometrischen Gleichung $\operatorname{Cos} bc = \operatorname{Sin} ab \operatorname{Sin} ac \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} ab \operatorname{Cos} ac$ und folglich

7) $F = r^2 \left[ab + \operatorname{Arc Sin} [-\operatorname{Cos} bc] - \operatorname{Arc Sin} (\operatorname{Cos} ac)\right]$

$= r^2 \left[ab - [\frac{1}{2}\pi - bc] - [\frac{1}{2}\pi - ac]\right]$; oder

8) $F = r^2 [ab + ac + bc - \pi]$, welches Resultat auf synthetischem Wege so leicht darzustellen ist.

II. Das Moment dieser Fläche F in Beziehung auf die Momenten-Ebene XY, in welcher die Ebene AOB liegend gedacht wird.

Es ist der Hebelsarm des Flächen-Elements $r^2 \operatorname{Sin}\alpha\, d\alpha\, d\beta$ in E, in Beziehung auf XY, gleich der Normale von E auf XY, $= r \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta$; also wenn z_0 den gesuchten Hebelsarm ausdrückt

1) $z_0 . F = \int\int r^3 \operatorname{Sin}\alpha^2 \operatorname{Sin}\beta\, d\alpha\, d\beta$.

Hieraus entsteht, wie in I.

2) $z_0 . F = \frac{r^3}{2} . \int (\alpha - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Const}) \operatorname{Sin}\beta\, d\beta$.

$$= \frac{r^3}{2} \cdot \int [\varrho - \operatorname{Sin}\varrho \operatorname{Cos}\varrho] \operatorname{Sin}\beta \, d\beta$$

$$= -\frac{r^3}{2} \int \varrho \, \partial (\operatorname{Cos}\beta)_\beta \cdot d\beta - \frac{r^3}{2} \int \operatorname{Sin}\varrho \operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Sin}\beta \, d\beta$$

$$= -\frac{r^3}{2} \varrho \operatorname{Cos}\beta + \frac{r^3}{2} \int \operatorname{Cos}\beta \, \partial \varrho_\beta \, d\beta - \frac{r^3}{2} \int \operatorname{Sin}\varrho \operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Sin}\beta \, d\beta$$

$$= -\frac{r^3}{2} \varrho \operatorname{Cos}\beta - \frac{r^3}{2} n \int \frac{\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}(\gamma+\beta)}{1+n^2 \operatorname{Sin}(\gamma+\beta)^2} \, d\beta$$

$$- \frac{r^3}{2} n \int \frac{\operatorname{Sin}(\gamma+\beta) \operatorname{Sin}\beta}{1+n^2 \operatorname{Sin}(\gamma+\beta)^2} \, d\beta$$

$$= -\frac{r^3}{2} \varrho \operatorname{Cos}\beta - \tfrac{1}{2} r^3 n \int \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{1+n^2 \operatorname{Sin}(\gamma+\beta)^2} \cdot d\beta$$

$$= -\frac{r^3}{2} \varrho \operatorname{Cos}\beta - \tfrac{1}{2} r^3 \frac{\operatorname{Cotg} ac}{\operatorname{Sin} a} \cdot \int \frac{\operatorname{Sec}(\gamma+\beta)^2}{1+(1+n^2)\operatorname{tg}(\gamma+\beta)^2} \cdot d\beta$$

$$= -\tfrac{1}{2} r^3 \left[\varrho \operatorname{Cos}\beta + \frac{\operatorname{Cotg} ac}{\operatorname{Sin} a} \cdot \frac{1}{p} \operatorname{Arctg}[p \operatorname{tg}(\gamma+\beta)] + C \right] \text{ oder}$$

$$3) \quad z_0 . F = -\tfrac{1}{2} r^3 \left[\varrho \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos} ac \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg}(\gamma+\beta)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} ac} + C \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} r^3 \left[a + \operatorname{Cos} ac \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} ac} - b \operatorname{Cos} ab \right.$$

$$\left. - \operatorname{Cos} ac . \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg}(\gamma+ab)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} ac} \right] .$$

Es ist aber $\dfrac{\operatorname{tg}(\gamma+ab)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} ac} = \dfrac{\operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Cos} ab + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Sin} ab}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} ac [\operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos} ab - \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin} ab]}$

$$= \frac{\operatorname{Cotg} ac \operatorname{Sin} ab + \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} ab}{\operatorname{Sin} a [\operatorname{Cos} ab \operatorname{Cos} ac - \operatorname{Sin} ab \operatorname{Sin} ac \operatorname{Cos} a]} = \frac{\operatorname{Cotg} b}{-\operatorname{Cos} bc} \text{ (siehe I.)}$$

folglich

$$4) \quad z_0 . F = \tfrac{1}{2} r^3 \left[a - b \operatorname{Cos} ab - \operatorname{Cos} ac \left[\operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{Cotg} b}{-\operatorname{Cos} bc} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{Cotg} a}{\operatorname{Cos} ac} \right] \right] .$$

Nach der Formel

$$\operatorname{Arctg} A - \operatorname{Arctg} B = \operatorname{Arctg} \frac{A-B}{1+AB} \text{ ; ist aber hier}$$

$$\text{Arctg}\frac{\text{Cotg}\,b}{-\text{Cos}\,bc}-\text{Arctg}\frac{\text{Cotg}\,a}{\text{Cos}\,ac}=$$

$$\text{Arctg}\frac{-[\text{Cotg}\,b\,\text{Cos}\,ac+\text{Cotg}\,a\,\text{Cos}\,bc]}{\text{Cos}\,ac\,\text{Cos}\,bc-\text{Cotg}\,a\,\text{Cotg}\,b}$$

oder $\frac{\text{Cos}\,b-\text{Cos}\,a\,\text{Cos}\,c}{\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,c}$ für $\text{Cos}\,ac$, und $\frac{\text{Cos}\,a-\text{Cos}\,b\,\text{Cos}\,c}{\text{Sin}\,b\,\text{Sin}\,c}$ für $\text{Cos}\,bc$ gesetzt, und reducirt,

$$\text{Arctg}\frac{\text{Cotg}\,b}{-\text{Cos}\,bc}-\text{Arctg}\frac{\text{Cotg}\,a}{\text{Cos}\,ac}=\text{Arctg}\,(\text{tg}\,o)=o,\ \text{folglich}$$

5) $z_0 . F=\frac{1}{2}r^3[a-b\,\text{Cos}\,ab-c\,\text{Cos}\,ac]$.

III. Das Moment dieser Fläche in Beziehung auf die Coordinaten-Ebene YZ.

In diesem Fall ist der Hebelsarm des Elements in E gleich $r\,\text{Cos}\,\alpha$, daher, wenn x_0 den Hebelsarm der ganzen Fläche F ausdrückt,

$$x_0 . F=r^3\int\int \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha\,d\alpha\,d\beta\ ,$$

oder, nach der Angabe in I. ausgeführt,

$$x_0 . F=-\frac{r^3}{4}\int[\text{Cos}\,2\alpha+C]\,d\beta$$

$$=\frac{r^3}{4}\int[1-\text{Cos}\,2\varrho]\,d\beta=\frac{r^3}{2}\int\text{Sin}\,\varrho^2 . d\beta$$

$$=\tfrac{1}{2}r^3.\int\frac{d\beta}{1+n^2\,\text{Sin}\,(\gamma+\beta)^2}$$

$$=\frac{r^3}{2p}\text{Arctg}\,[p\,\text{tg}(\gamma+\beta)]+C\ (\text{wie in II.})$$

$$=\frac{r^3\,\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,ac}{2}\left[\text{Arctg}\frac{\text{tg}(\gamma+ab)}{\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,ac}-\text{Arctg}\frac{\text{tg}\,\gamma}{\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,ac}\right]$$

oder, ganz wie in II. reducirt,

$$x_0 . F=\tfrac{1}{2}r^3 . c\,\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,ac.$$

IV. Das Moment dieser Fläche F in Beziehung auf XZ.

Bezeichnet y_0 den Hebelsarm von F, so ist

$$y_0 . F=r^3\int\int \text{Sin}\,\alpha^2\,\text{Cos}\,\beta\,d\alpha\,d\beta$$

$$=\tfrac{1}{2}r^3\int(\varrho-\text{Sin}\,\varrho\,\text{Cos}\,\varrho)\,\text{Cos}\,\beta . d\beta$$

$$=\tfrac{1}{2}r^3[\varrho\,\text{Sin}\,\beta-\int\text{Sin}\,\beta . \partial\varrho_\beta . d\beta-\int\text{Sin}\,\varrho\,\text{Cos}\,\varrho\,\text{Cos}\,\beta\,d\beta].$$

Substituirt man nun für $\partial\varrho_\beta$ den Werth $-\frac{n\,\mathrm{Cos}(\gamma+\beta)}{1+n^2\,\mathrm{Sin}(\gamma+\beta)^2}$;

und für $\mathrm{Sin}\varrho\,\mathrm{Cos}\varrho$ den Werth $\frac{\mathrm{Cotg}\,\varrho}{\mathrm{Cosec}\,\varrho^2}$ oder $\frac{n\,\mathrm{Sin}(\gamma+\beta)}{1+n^2\,\mathrm{Sin}(\gamma+\beta)^2}$, so entsteht

$$y_0.F=\tfrac{1}{2}r^3\left[\varrho\,\mathrm{Sin}\beta-\mathrm{Cotg}\,a\int\frac{d\beta}{1+n^2\,\mathrm{Sin}(\gamma+\beta)^2}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}r^3\left[\varrho\,\mathrm{Sin}\beta-\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Sin}\,ac\,\mathrm{Arctg}\frac{\mathrm{tg}(\gamma+ab)}{\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,ac}+C\right]$$

und hieraus, wie in II.

$$y_0.F=\tfrac{1}{2}r^3.[b\,\mathrm{Sin}\,ab-c\,\mathrm{Sin}\,ac\,\mathrm{Cos}\,a].$$

V. Der körperliche Inhalt k von OABC.

Betrachtet man r als veränderlich, so ist

$$k=\int\int\int r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,d\beta.r\,d\alpha.dr$$

und wenn man zuerst nach r integrirt und das Resultat zwischen den Grenzen $r=r$ und $r=o$ nimmt, so erhält man dann, ganz nach I.

$$k=\tfrac{1}{3}r^3[ab+ac+bc-\pi].$$

VI. Das Moment von k in Beziehung auf XY.

Bezeichnet z_0 den Hebelsarm, so ist

$$z_0.k=\int\int\int r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,d\beta.r\,d\alpha.dr.r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta$$

und man erhält, wie in V., aus II.

$$z_0.k=\tfrac{1}{8}r^4[a-b\,\mathrm{Cos}\,ab-c\,\mathrm{Cos}\,ac].$$

VII. Das Moment von k in Beziehung auf YZ.

Ist x_0 der Hebelsarm, so ist

$$x_0.k=\int\int\int r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,d\beta.rd\alpha.dr.r\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$

und hieraus wie in VI., nach III.

$$x_0.k=\tfrac{1}{8}r^4\,o\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,ac.$$

VIII. Das Moment von k in Beziehung auf XZ.

Hier ist der Hebelsarm des Elements $=r\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta$ und man erhält, nach IV.

$$y_0.k=\tfrac{1}{8}r^4[b\,\mathrm{Sin}\,ab-c\,\mathrm{Sin}\,ac.\,\mathrm{Cos}\,a].$$

Aufgabe XX.

Im sphärischen Dreieck ABC (Fig. 18.) sind die Winkel bei B und C, jeder $= \frac{1}{2}\pi$; $\angle AOB = \frac{1}{4}\pi$ und $\angle BOC = \alpha$, also dieses sphärische Dreieck die Hälfte eines sphärischen Zweiecks, zum Halbmesser $OA = OB = OC = r$; die begrenzende Fläche F; den Inhalt k des Körpers und die Momente M derselben zu bestimmen.

Wählt man die Kanten OA, OB als die Achsen X, Y der x, y und die in O auf XY normale Z als die Achse der z, so ist

I. Für die Bestimmung von F;

A. Für jeden Theil f von ABC, begrenzt durch CB und einen Parallelbogen in der Ebene durch den Endpunct jedes x, normal auf X, $f = \int^2 \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}.dx\,dy$. Aus der Gleichung $r^2 = x^2+y^2+z^2$ für die Oberfläche folgt aber $o = 2x+2z\partial z_x$ und $o = 2y+2z\partial z_y$; also $\partial z_x = -\frac{x}{z}$ und $\partial z_y = -\frac{y}{z}$; folglich

$$f = \int^2 \frac{r}{z}dx\,dy = \int^2 \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy;$$

also, nach y integrirt

$$f = r\int \text{AroSin}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}.dx;$$ zwischen $y = \sqrt{r^2-x^2}$ und

$$y = \text{Cos}\alpha.\sqrt{r^2-x^2};$$ d. h.

$$f = r\int\left[\frac{\pi}{2} - \text{AroSin}(\text{Cos}\alpha)\right]dx = r\int \text{AroCos}(\text{Cos}\alpha)\,dx$$

$$= r\int \alpha\,dx;$$ und daher

$f = r\alpha . x$; und hieraus $ABC = F = r^2\alpha$; oder auch:

$$f = \int^2 \sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial y_z{}^2}\, dx\, dz = \int^2 \frac{r\, dx\, dz}{\sqrt{r^2-x^2-z^2}};$$

folglich, nach z integrirt,

$$f = r\int \mathrm{Arc\,Sin}\frac{z}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx \text{ zwischen } z = \mathrm{Sin}\,\alpha\sqrt{r^2-x^2} \text{ und}$$

$$z = o;\ \text{d. h.}$$

$$f = r\int \mathrm{Arc\,Sin}(\mathrm{Sin}\,\alpha)\, dx = r\int \alpha\, dx \text{ u. s. w.}$$

B. Für jeden Theil f von F begrenzt durch AB und einen Parallelbogen zwischen AC und BC in der Ebene durch den Endpunct jedes z, normal auf Z,

$$f = \int^2 \sqrt{1+\partial x_z{}^2+\partial x_y{}^2}\, .dy\, .dz = \int^2 \frac{r\, dy\, dz}{x}$$

$$= \int^2 \frac{r\, dy\, dz}{\sqrt{r^2-z^2-y^2}};\ \text{also}$$

$$f = r\int \mathrm{Arc\,Sin}\frac{y}{\sqrt{r^2-z^2}}\, dz \text{ zwischen } y = \sqrt{r^2-z^2} \text{ und}$$

$$y = z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha;\ \text{also}$$

$$f = r\int \left[\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{Arc\,Sin}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\right] dz = r\int \mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\, dz$$

$$= r\left[z\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}} - \int z\,\partial\left[\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\right]_z dz\right]$$

$$= r\left[z\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}} + r^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\int \frac{z\, dz}{(r^2-z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2-z^2}}\right];$$

folglich

$$f = r\left[z\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}} - r\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2-z^2}}{r\,\mathrm{Cos}\,\alpha} + C\right]$$

und daher

$$f = r\left[z\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2-z^2}}{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha} + r\alpha - r\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2-z^2}}{r\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\right];$$

also die Fläche zwischen diesen Parallelbogen und C

$$= r\left[r\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}}{r\,\mathrm{Cos}\alpha} - z\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}}{z\,\mathrm{Cos}\alpha}\right];$$

oder auch:

$f = \int^2 \frac{r\,dx\,dz}{y}$; also $f = r\int \mathrm{Arc\,Sin}\frac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,dz$ zwischen

$x = \sqrt{r^2 - z^2\,\mathrm{Cosec}\alpha^2}$ und $x = o$; folglich

$$f = r\int \mathrm{Arc\,Sin}\sqrt{\frac{r^2 - z^2\,\mathrm{Cosec}\alpha^2}{r^2 - z^2}}\,dz = r\int \mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,dz$$

u. s. w.

II. Für die Bestimmung von K.

A. Für jeden Theil k von K zwischen OBC und einer parallelen Ebene durch den Endpunct jedes x, normal auf X.

Jede solche Ebene ist ein Kreisausschnitt zum Halbmesser $\sqrt{r^2 - x^2}$ und dem Mittelpuncts-Winkel α, also $= \frac{r^2 - x^2}{2}.\alpha$; daher

$k = \int \frac{r^2 - x^2}{2}.\alpha\,dx$; folglich

$k = \frac{(3r^2 - x^2)\,x}{6}.\alpha$ und also $K = \frac{r^3\,\alpha}{3}$; oder auch:

$k = \int^3 dx\,dy\,dz$; also

$k = \int^2 y\,dx\,dz$ zwischen $y = \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$ und $y = z\,\mathrm{Cotg}\alpha$; daher

$k = \int^2 [\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - z\,\mathrm{Cotg}\alpha].dx\,dz$; folglich

$$k = \int\left[\tfrac{1}{2}z\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} + \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{z}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \tfrac{1}{2}z^2\,\mathrm{Cotg}\alpha\right]dx$$

zwischen $z = \mathrm{Sin}\alpha.\sqrt{r^2 - x^2}$ und $z = o$; demnach

$k = \int[\tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\alpha + \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\alpha - \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\alpha]\,dx = \int \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\alpha\,dx$ u. s. w.

B. Für jeden Theil k von K zwischen AOB und einer parallelen Ebene durch den Endpunct jedes z.

Jede solche Ebene ist ein Kreisabschnitt, dem Halbmesser $\sqrt{r^2 - z^2}$ und dem Mittelpuncts-Winkel β zugehörig, für welchen

$\sqrt{r^2-z^2}.\,\mathrm{Cos}\beta = z\,\mathrm{Cotg}\alpha$ also $\beta = \mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}$ ist, daher der Inhalt jedes solchen Kreisabschnitts

$$= \frac{r^2-z^2}{2}.\beta - \frac{r^2-z^2}{2}\,\mathrm{Sin}\beta\,\mathrm{Cos}\beta$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(r^2-z^2)\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}} - z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha\sqrt{r^2-z^2\,\mathrm{Cosec}\alpha^2}\right]$$

und folglich

$$k = \tfrac{1}{2}\int\left[\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\partial\left(r^2z - \tfrac{1}{3}z^3\right)_z - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{\mathrm{Sin}\alpha^2}.z\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}\right]dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(r^2z - \tfrac{1}{3}z^3\right)\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}} - \int\left(r^2z - \frac{z^3}{3}\right)\partial\left[\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\right]_z + \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{3\,\mathrm{Sin}\alpha^2}\int\partial\left[r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2\right]_z^{\frac{1}{2}}\right]$$ also

$$k = \frac{(3r^2-z^2)z}{6}\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}} + \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\alpha}{6}\int\frac{(3r^2-z^2)z\,dz}{(r^2-z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2-z^2}} + \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{6\,\mathrm{Sin}\alpha^2}\left(r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2-z^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Wird nun $\int\frac{(3r^2-z^2)z\,dz}{(r^2-z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2-z^2}} = P$ und

$r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2 = u^2$ gesetzt, so ist

$$P = -\int\frac{r^2(3-\mathrm{Sin}\alpha^2)+u^2}{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha^2+u^2}du = -\left[1+\frac{2r^2}{u^2+r^2\,\mathrm{Cos}\alpha^2}\right]du;$$

also

$$P = -u - 2r\,\mathrm{Sec}\alpha\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{u}{r\,\mathrm{Cos}\alpha} = -\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2-z^2} - 2r\,\mathrm{Sec}\alpha\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2-z^2}}{r\,\mathrm{Cos}\alpha},$$

folglich, wenn dieser Werth substituirt wird,

$$k=\frac{(3r^2-z^2)z}{6}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{r^2\operatorname{Sin}\alpha^2-z^2}}{z\operatorname{Cos}\alpha}-\frac{r^2}{3}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{r^2\operatorname{Sin}\alpha^2-z^2}}{r\operatorname{Cos}\alpha}$$

$$-\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{6\operatorname{Sin}\alpha^2}z^2\cdot\sqrt{r^2\operatorname{Sin}\alpha^2-z^2}+C$$

und, weil mit $z=0$, k verſchwindet,

$$k=\frac{r^3\alpha}{3}+\frac{(3r^2-z^2)z}{6}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{r^2\operatorname{Sin}\alpha^2-z^2}}{z\operatorname{Cos}\alpha}$$

$$-\frac{r^3}{3}\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{r^2\operatorname{Sin}\alpha^2-z^2}}{r\operatorname{Cos}\alpha}-\frac{z^2\operatorname{Cos}\alpha}{6\operatorname{Sin}\alpha^2}\sqrt{r^2\operatorname{Sin}\alpha^2-z^2},$$

woraus, wie in A, $K=\frac{r^3\alpha}{3}$ folgt.

Es ergiebt ſich k auch eben ſo, aus:

$k=\int^3 dx\,dy\,dz=\int^2 x\,dy\,dz=\int^2\sqrt{r^2-z^2-y^2}.dy\,dz$; alſo

$$k=\tfrac{1}{2}\int\left[y\sqrt{r^2-z^2-y^2}+(r^2-z^2)\operatorname{Arc\,Sin}\frac{y}{\sqrt{r^2-z^2}}\right]dz,$$

zwiſchen den Grenzen $y=\sqrt{r^2-z^2}$ und $y=z\operatorname{Cotg}\alpha$; alſo

$$k=\tfrac{1}{2}\int\left[(r^2-z^2)\tfrac{1}{2}\pi-z\operatorname{Cotg}\alpha.\sqrt{r^2-z^2\operatorname{Cosec}\alpha^2}\right.$$

$$\left.-(r^2-z^2)\operatorname{Arc\,Sin}\frac{z\operatorname{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\right]dz$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\left[(r^2-z^2)\operatorname{Arc\,Cos}\frac{z\operatorname{Cotg}\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\right.$$

$$\left.-z\operatorname{Cotg}\alpha\sqrt{r^2-z^2\operatorname{Cosec}\alpha^2}\right]dz \text{ u. ſ. w.}$$

III. Für die Beſtimmung von M;

A. Für die Fläche f in I. A., in Beziehung auf die Momenten-Ebene ZY.

Bezeichnet $f.x_0$ dieſes Moment, ſo iſt

$$f.x_0=\int^2 x.\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}.dx\,dy$$

$$=\int^2\frac{r\,dx\,dy}{z}=\int^2\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}};\text{ alſo}$$

$f.x_0 = r\int x \operatorname{ArcSin}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$, zwiſchen $y=\sqrt{r^2-x^2}$

und $\operatorname{Cos}\alpha\sqrt{r^2-x^2}$; daher

$f.x_0 = r\int x[\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{ArcSin}(\operatorname{Cos}\alpha)]\,dx = \int r x \alpha\,dx$; und folglich

$f.x_0 = \frac{r\alpha x^2}{2}$; alſo $F.x_0 = \frac{r^3\alpha}{2} = r^2\alpha.\frac{r}{2}$.

B. Für dieſelbe Fläche in Beziehung auf XY; bezeichnet $f.z_0$ dieſes Moment, ſo iſt

$f.z_0 = \int^2 z.\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\,dx\,dy = \int^2 r\,dx\,dy$; alſo

$f.z_0 = \int r y\,dx$ zwiſchen den vorigen Grenzen, daher

$f.z_0 = r(1-\operatorname{Cos}\alpha)\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$; folglich

$f.z_0 = \frac{r(1-\operatorname{Cos}\alpha)}{2}\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\operatorname{ArcSin}\frac{x}{r}\right]$

$= r(1-\operatorname{Cos}\alpha)$. der Grundebene auf XY.

Für $x=r$ wird hieraus $F.z_0 = \frac{r^3(1-\operatorname{Cos}\alpha)\pi}{4}$.

C. Für dieſelbe Fläche in Beziehung auf die Ebene XZ: Hier iſt

$f.y_0 = \int^2 y.\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}.dx\,dy = \int^2\frac{r y\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$ alſo

$f.y_0 = -r\int\sqrt{r^2-x^2-y^2}.dx$ zwiſchen den vorigen Grenzen, alſo

$f.y_0 = r\operatorname{Sin}\alpha\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$; und daher

$f.y_0 = \frac{r\operatorname{Sin}\alpha}{2}.\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\operatorname{ArcSin}\frac{x}{r}\right]$, ſo wi

$F.y_0 = \frac{r^3\pi\operatorname{Sin}\alpha}{4}$.

D. Für die Fläche in I. B. in Beziehung auf XY.

Aus $f.z_0 = \int^2 z.\sqrt{1+\partial x_z{}^2+\partial x^2}.dz\,dy$

$= \int^2\frac{rz\,dz\,dy}{\sqrt{r^2-z^2-y^2}}$ folgt

$f.z_0 = \int rz\operatorname{ArcSin}\frac{y}{\sqrt{r^2-z^2}}dz$,

zwiſchen den Grenzen $y = \sqrt{r^2 - z^2}$ und $z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$; alſo

$$f.z_o = \int rz\left[\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{Arc\,Sin}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right]dz$$

$$= \int rz\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,dz$$

$$= \frac{r}{2}\left[z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}} - \int z^2 . \partial\left[\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right]_z dz\right]$$

$$= \frac{r}{2}.z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

$$+ \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}.\int \frac{z^2\,dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}\,;$$

$$= \frac{r}{2}.z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}} + \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}.P, \text{ wenn}$$

$P = \int \frac{z^2\,dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}$ iſt. Setzt man nun

$\frac{z}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}} = w$; ſo entſteht:

$$P = \int \frac{w^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,dw}{(1+w^2)(1+w^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2)} = \int \frac{dw}{1+w^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2} - \int \frac{dw}{1+w^2}\,;$$

daher

$$P = \mathrm{Sec}\,\alpha\,\mathrm{Arc\,tg}\,(w\,\mathrm{Cos}\,\alpha) - \mathrm{Arc\,tg}\,w$$

$$= \mathrm{Sec}\,\alpha\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}} - \mathrm{Arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}$$

und folglich

$$f.z_o = \frac{rz^2}{2}\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha} + \frac{r^3}{2}\mathrm{Arc\,tg}\frac{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\sqrt{r\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}$$

$$- \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}\mathrm{Arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}\,,$$

woraus, für $z = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; $F.z_o = \frac{r^3\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)\pi}{4}$ folgt, wie in B.

$f.x_0 = r\int x \operatorname{ArcSin}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$, zwiſchen $y=\sqrt{r^2-x^2}$

und $\operatorname{Cos}\alpha\sqrt{r^2-x^2}$; daher

$f.x_0 = r\int x[\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{ArcSin}(\operatorname{Cos}\alpha)]\,dx = \int rx\alpha\,dx$; und folglich

$f.x_0 = \frac{r\alpha x^2}{2}$; alſo $F.x_0 = \frac{r^3\alpha}{2} = r^2\alpha.\frac{r}{2}$.

B. Für dieſelbe Fläche in Beziehung auf XY; bezeichnet $f.z_0$ dieſes Moment, ſo iſt

$f.z_0 = \int^2 z.\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\,dx\,dy = \int^2 r\,dx\,dy$; alſo

$f.z_0 = \int ry\,dx$ zwiſchen den vorigen Grenzen, daher

$f.z_0 = r(1-\operatorname{Cos}\alpha)\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$; folglich

$f.z_0 = \frac{r(1-\operatorname{Cos}\alpha)}{2}\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\operatorname{ArcSin}\frac{x}{r}\right]$

$= r(1-\operatorname{Cos}\alpha)$. der Grundebene auf XY.

Für $x=r$ wird hieraus $F.z_0 = \frac{r^3(1-\operatorname{Cos}\alpha)\pi}{4}$

C. Für dieſelbe Fläche in Beziehung auf die Ebene XZ: Hier iſt

$f.y_0 = \int^2 y.\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}.dx\,dy = \int^2\frac{ry\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$ alſo

$f.y_0 = -r\int\sqrt{r^2-x^2-y^2}.dx$ zwiſchen den vorigen Grenzen, alſo

$f.y_0 = r\operatorname{Sin}\alpha\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$; und daher

$f.y_0 = \frac{r\operatorname{Sin}\alpha}{2}.\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\operatorname{ArcSin}\frac{x}{r}\right]$, ſo wi

$F.y_0 = \frac{r^3\pi\operatorname{Sin}\alpha}{4}$.

D. Für die Fläche in I. B. in Beziehung auf XY.

Aus $f.z_0 = \int^2 z.\sqrt{1+\partial x_z{}^2+\partial x^2}.dz\,dy$

$= \int\frac{rz\,dz\,dy}{\sqrt{r^2-z^2-y^2}}$ folgt

$f.z_0 = \int rz\operatorname{ArcSin}\frac{y}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz$,

zwiſchen den Grenzen $y = \sqrt{r^2 - z^2}$ und $z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$; alſo

$$f.z_0 = \int rz\left[\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{Arc\,Sin}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right]dz$$

$$= \int rz\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,dz$$

$$= \frac{r}{2}\left[z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}} - \int z^2.\partial\left[\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right]_z dz\right]$$

$$= \frac{r}{2}.z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

$$+ \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}.\int \frac{z^2\,dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}};$$

$$= \frac{r}{2}.z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}} + \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}.P, \text{ wenn}$$

$P = \int \frac{z^2\,dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}$ iſt. Setzt man nun

$\frac{z}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}} = w$; ſo entſteht:

$$P = \int \frac{w^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,dw}{(1+w^2)(1+w^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2)} = \int \frac{dw}{1+w^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2} - \int \frac{dw}{1+w^2};$$

daher

$$P = \mathrm{Sec}\,\alpha\,\mathrm{Arctg}\,(w\,\mathrm{Cos}\,\alpha) - \mathrm{Arctg}\,w$$

$$= \mathrm{Sec}\,\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}} - \mathrm{Arctg}\frac{z}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}$$

und folglich

$$f.z_0 = \frac{rz^2}{2}\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha} + \frac{r^3}{2}\mathrm{Arctg}\frac{z\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\sqrt{r\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}}$$

$$- \frac{r^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2}\mathrm{Arctg}\frac{z}{\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}},$$

woraus, für $z = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; $F.z_0 = \frac{r^3\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)\,\pi}{4}$ folgt, wie in B.

Man kann auch

$$f.z_0 = \int^2 z.\sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial y_x{}^2}\,.\,dz\,dx = \int^2 \frac{rz\,dz\,dx}{\sqrt{r^2-z^2-x^2}}$$

zum Grunde legen, und erhält dann

$$f.z_0 = \int rz\,\text{Arc Sin}\,\frac{x}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz \text{ zwiſchen}$$

$x = \sqrt{r^2-z^2\,\text{Cosec}\,\alpha^2}$ und $x = o$; alſo

$$f.z_0 = \int rz\,\text{Arc Sin}\sqrt{\frac{r^2-z^2\,\text{Cosec}\,\alpha^2}{r^2-z^2}}\,dz$$

$$= r\int z\,\text{Arc Cos}\,\frac{z\,\text{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz \text{ u. ſ. w.}$$

E. Für dieſelbe Fläche in Beziehung auf YZ.

Es iſt $f.x_0 = \int^2 x.\sqrt{1+\partial x_z{}^2+\partial x_y{}^2}\,dz\,dy$

$= \int^2 r\,dz\,dy$; alſo $f.x_0 = \int ry\,dz$

$= r\int[\sqrt{r^2-z^2} - z\,\text{Cotg}\,\alpha]\,dz$; folglich

$$f.x_0 = \frac{r}{2}.\left[z\sqrt{r^2-z^2}+r^2\,\text{Arc Sin}\,\frac{z}{r}-z^2\,\text{Cotg}\,\alpha\right]; \text{ woraus}$$

$$F.x_0 = \frac{r^2\alpha}{2} \text{ folgt.}$$

Man kann auch

$$f.x_0 = \int^2 x.\sqrt{1+\partial y_z{}^2+\partial y_x{}^2}.dz\,dx = \int^2 \frac{rx\,dz\,dx}{\sqrt{r^2-z^2-x^2}}$$

zum Grunde legen, und erhält hieraus

$$f.x_0 = -r\int\sqrt{r^2-z^2-x^2}\,dz$$

$$= r\int[\sqrt{r^2-z^2} - z\,\text{Cotg}\,\alpha]\,dz \text{ u. ſ. w.}$$

F. Für dieſelbe Fläche in Beziehung auf XZ.

Hier entſpringt aus

$$f.y_0 = \int^2 y\sqrt{1+\partial x_z{}^2+\partial x_y{}^2}.dz\,dy = \int^2 \frac{ry\,dz\,dy}{\sqrt{r-z^2-y^2}} \text{ ſogleich}$$

$$f.y_0 = -r\int\sqrt{r^2-z^2-y^2}\,dz$$

$$= \frac{r}{\text{Sin}\,\alpha}\int\sqrt{r^2\,\text{Sin}\,\alpha^2-z^2}\,dz; \text{ folglich}$$

$$f.y_0 = \frac{r}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha}.\left[z.\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2} + r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2.\,\mathrm{ArcSin}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\alpha}\right];$$

also $F.y_0 = \frac{r^3\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\pi}{4}$; oder: aus

$$f.y_0 = \int^2 r\,dz\,dx = \int r x\,dz = \frac{r}{\mathrm{Sin}\alpha}\int \sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}.\,dz \text{ u. f. w.}$$

G. Für den Körper in II. A. in Beziehung auf die Ebene YZ.

Die Ebene im Endpunct jedes x, normal auf X hat den Inhalt $\frac{(r^2 - x^2)\alpha}{2}$, und also ist

$$k.x_0 = \int dx.x.\frac{r^2 - x^2}{2}\alpha = \frac{(2r^2 - x^2).x^2}{8}\alpha;\ \text{folglich}$$

$$K.x_0 = \frac{r^4\alpha}{8};\ \text{oder auch}$$

$$k.x_0 = \int^3 x.dx\,dy\,dz = \int^2 xy\,dx\,dz = \int^2 x\left[\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}\right.$$
$$\left. - z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha\right]dx\,dz = \tfrac{1}{2}\int x\left[z\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}\right.$$
$$\left. + (r^2 - x^2)\,\mathrm{Arc.\,Sin}\frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} - z^2\,\mathrm{Cotg}\,\alpha\right]dx \text{ zwischen}$$

$z = \mathrm{Sin}\,\alpha\sqrt{r^2 - z^2}$ und $z = 0$; daher

$$k.x_0 = \frac{\alpha}{2}\int x(r^2 - x^2)\,dx \text{ u. f. w.}$$

H. Für denselben Körper in Beziehung auf die Ebene XY als Momenten-Ebene:

Hier ist

$$k.z_0 = \int^3 z\,dx\,dy\,dz = \int^2 zy\,dx\,dz$$
$$= \int^2 \left[z\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} - z^2\,\mathrm{Cotg}\,\alpha\right]dx\,dz$$
$$= -\int\left[\tfrac{1}{3}(r^2 - x^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{3}z^3\,\mathrm{Cotg}\,\alpha\right]dx$$
$$= \int\left[-\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,\alpha^3(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$
$$= \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}};\ \text{und nun}$$

$$k.z_0 = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{24}\left[[5r^2 - 2x^2]\,x\sqrt{r^2 - x^2} + 3r^4\,\mathrm{ArcSin}\frac{x}{r}\right].$$

Für $x = r$; folgt aus G; $K.x_0 = \frac{r^4 \alpha}{8}$; und aus H. $K.z_0 = \frac{r^4 \pi}{16}(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)$, so daß also die Entfernung des Schwerpunctes dieses halben körperlichen Zweiecks von der Ebene $YZ = \frac{3}{8}r$ und von der Ebene $XY = \frac{3r}{16}\pi . \frac{1 - \mathrm{Cos}\,\alpha}{\alpha}$ ist, woraus für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, der letztere Hebelsarm auch $= \frac{3}{8}r$ hervorgeht.

I. Für den Körper in II. B. in Beziehung auf die Momenten-Ebene XY.

Man hat sogleich nach II. B.

$$k.z_0 = \int \Big[\tfrac{1}{2}(r^2 z - z^3)\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}} - \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}\, z^2 . \sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}\Big]\,dz$$

$$= \tfrac{1}{8}\Big[(2r^2 - z^2)\,z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\Big] - \tfrac{1}{8}\int (2r^2 - z^2)\,z^2\,\partial\Big[\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\Big]_z\,dz - \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2} . \int z^2 \sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2} . dz$$

$$= \tfrac{1}{8} . \Big[(2r^2 - z^2)\,z^2\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}}\Big] + \frac{r^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{8}\int . \frac{(2r^2 - z^2)\,z^2\,dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}} - \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}\int z^2 \sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}\,dz\,;$$ also

$\int \frac{(2r^2 - z^2)\,z^2\,dz}{(r^2 - z^2)\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}} = P$ und $\int z^2 \sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}\,dz = Q$ gesetzt,

$$k.z_0 = \frac{(2r^2 - z^2)\,z^2}{8}\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha}{\sqrt{r^2 - z^2}} + \frac{r^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{8} . P - \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2} . Q.$$

Zur Bestimmung von P, setze man $\frac{z}{\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}} = u$, so entsteht

$$P = \int \frac{2r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 . u^2 + (2 - \operatorname{Sin}\alpha^2) r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 . u^4}{(1+u^2)^2 . [1 + \operatorname{Cos}\alpha^2 . u^2]} du$$

$$= \int \left[-\frac{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2}{(1+u^2)^2} - \frac{r^2 \operatorname{Cos}\alpha^2}{1+u^2} + \frac{r^2}{1 + \operatorname{Cos}\alpha^2 . u^2} \right] du$$

$$= -\frac{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2}{2} \cdot \frac{u}{1+u^2} - \frac{(2 - \operatorname{Sin}\alpha^2) r^2}{2} . \operatorname{Arc\,tg} u$$

$$+ \frac{r^2}{\operatorname{Cos}\alpha} \operatorname{Arc\,tg} (u \operatorname{Cos}\alpha)$$

$$= -\frac{z\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}}{2} - \frac{(2 - \operatorname{Sin}\alpha^2) r^2}{2} \operatorname{Arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}}$$

$$+ \frac{r^2}{\operatorname{Cos}\alpha} \operatorname{Arc\,tg} \frac{z \operatorname{Cos}\alpha}{\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}} ;$$

ferner ist:

$$Q = \int z^2 \sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2} \, dz = \frac{r^4 \operatorname{Sin}\alpha^4}{8} \operatorname{Arc\,Sin} \frac{z}{r \operatorname{Sin}\alpha}$$

$$+ \tfrac{1}{8} [2z^2 - r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2] z \sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2} ;$$

folglich, wenn man diese Werthe einführt,

$$k . z_0 = \frac{[2r^2 - z^2] z^2}{8} \operatorname{Arc\,tg} \frac{\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}}{z \operatorname{Cos}\alpha}$$

$$+ \frac{r^4}{8} \operatorname{Arc\,tg} \frac{z \operatorname{Cos}\alpha}{\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}} - \frac{r^4 \operatorname{Cos}\alpha}{8} \operatorname{Arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2}}$$

$$- \frac{z^3 \operatorname{Cos}\alpha}{8 \operatorname{Sin}\alpha^2} \cdot \sqrt{r^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 - z^2} ;$$

woraus, für $z = r \operatorname{Sin}\alpha$; $K . z_0 = \frac{\pi r^4}{16} (1 - \operatorname{Cos}\alpha)$; wie in H, hervorgeht.

K. Für denselben Körper II. B. in Beziehung auf die Momentenachse YZ.

Es ist $k . x_0 = \int^3 x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \int^2 x^2 \, dy \, dz$ zwischen $x = \sqrt{r^2 - z^2 - y^2}$ und o; daher

$k.x_0 = \frac{1}{2}\int^2 (r^2 - z^2 - y)^2\, dz\, dy$, folglich

$k.x_0 = \int [\frac{1}{2}(r^2 - z^2)y - \frac{1}{6}y^3]\, dz$, zwiſchen $y^2 = r^2 - z^2$ und $y = z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$; alſo

$k.x_0 = \int [\frac{1}{2}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(r^2 - z^2)z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha + \frac{1}{6}z^3\,\mathrm{Cotg}\,\alpha^3]\, dz$

$= \frac{1}{5}(r^2 - z^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}r^2 z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha + \frac{1}{2}z^3\,\mathrm{Cotg}\,\alpha + \frac{1}{6}z^5\,\mathrm{Cotg}\,\alpha^3$

und daher

$$k.x_0 = \frac{1}{24}\left[3r^4\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{z}{r} + (5r^2 - 2z^2)z\sqrt{r^2 - z^2} - 6r^2 z^2\,\mathrm{Cotg}\,\alpha + (3 + \mathrm{Cotg}\,\alpha^2)\,\mathrm{Cotg}\,\alpha . z^4\right]$$

woraus, wie in G., für $z = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; $K.x_0 = \frac{r^4\alpha}{8}$ hervorgeht.

Aufgabe XXI.

Es sei in voriger Aufgabe und Figur der elliptische Quadrant AD, die Projection des Kreis-Quadranten AC auf die Ebene XY; es soll der Inhalt K dieses Körpers AOCD und sein Schwerpunct bestimmt werden.

I. Inhalts-Bestimmung für jeden Theil k dieses Körpers, abgeschnitten durch eine Ebene ∥ mit XZ.

Es ist $k = \int^2 dx\,dy\,dz = \int^2 z\,dx\,dy$ zwischen $z = y\,tg\alpha$ und $z = o$; daher $k = \int^2 y\,tg\alpha\,dx\,dy = \int x\,y\,tg\alpha\,dy$ zwischen $x^2 = r^2 - y^2\,Sec\alpha^2$ und o; also $k = \int y\,tg\alpha\sqrt{r^2 - y^2\,Sec\alpha^2}\,dy$

$$= \frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha^2}\int y.\sqrt{r^2\,Cos\,\alpha^2 - y^2}\,dy;$$ und demnach

$$k = -\frac{Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha^2}\left[r^2\,Cos\,\alpha^2 - y^2\right]^{\frac{3}{2}} + C;$$ folglich

$$k = \frac{Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha^2}\cdot\left[r^3\,Cos\,\alpha^3 - (r^2\,Cos\,\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

woraus für $y = r\,Cos\,\alpha$; $K = \frac{r^3}{6}\,Sin\,2\alpha$ folgt.

II. Inhalts-Bestimmung für jeden Theil k abgeschnitten durch eine Ebene ∥ YZ.

Es ergiebt sich leicht $k = \int \frac{1}{4}\,Sin\,2\alpha\,(r^2 - x^2)\,dx$

$$= \frac{Sin\,2\alpha}{12}(3r^2 - x^2)\,x;$$ und also $K = \frac{r^3\,Sin\,2\alpha}{6}$.

III. Inhaltsbestimmung für jeden Theil k, abgeschnitten durch eine Ebene ∥ XY.

Es ist $k = \int^2 x\,dz\,dy$ zwischen $x = \sqrt{r^2 - y^2\,\mathrm{Sec}\alpha^2}$ und $x = o$; also

$$k = \frac{1}{\mathrm{Cos}\alpha}\int^2 \sqrt{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha^2 - y^2}\,dy\,dz\text{; folglich}$$

$$k = \frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\alpha}\int\left[y\sqrt{r^2\mathrm{Cos}\alpha^2 - y^2} + r^2\mathrm{Cos}\alpha^2\,\mathrm{ArcSin}\frac{y}{r\mathrm{Cos}\alpha}\right]dz$$

zwischen $y = r\,\mathrm{Cos}\alpha$ und $y = z\,\mathrm{Cotg}\alpha$; daher

$$k = \frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\alpha}\int\left[r^2\,\mathrm{Cos}\alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2} - z\,\mathrm{Cotg}\alpha\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}\right.$$

$$\left. - r^2\,\mathrm{Cos}\alpha^2\,\mathrm{ArcSin}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\alpha}\right]dz$$

$$= \int\left[\frac{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha}{2}\,\mathrm{ArcCos}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\alpha} - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\alpha^2}\cdot z\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}\right]dz,$$

welche Formel sich auch unmittelbar ergiebt, wenn man den elliptischen Abschnitt in der Höhe z über der Ebene XY, dessen Inhalt sie ausdrückt, gleich selbst ermittelt. Durch theilweises Integriren folgt nun sogleich:

$$k = \frac{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha}{2}\,z\,\mathrm{ArcCos}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\alpha} - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{6\,\mathrm{Sin}\alpha^3}(2r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 + z^2)$$

$$\times\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2} + C\text{; also}$$

$$k = \frac{r^3\,\mathrm{Sin}\,2\alpha}{6} + \frac{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha}{2}\,z\,\mathrm{ArcCos}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\alpha} - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{6\,\mathrm{Sin}\alpha^3}$$

$$\times\,[2r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 + z^2]\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}\,.$$

Integrirt man zuerst nach y und dann nach x; so entsteht,

$$k = \int\left[\frac{\mathrm{Cos}\alpha}{2}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2\,\mathrm{ArcSin}\frac{x}{r}\right) - xz\,\mathrm{Cotg}\alpha\right]dz$$

zwischen $x = \sqrt{r^2 - z^2\,\mathrm{Cosec}\alpha^2}$ und $x = o$ u. s. w.

IV. Bestimmung des Momentes für den Körper k in I.

A. In Beziehung auf XZ als Momenten-Ebene.

Es ist die Ebene durch den Endpunct jedes y normal auf XZ

$$= \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha^2}\cdot y\sqrt{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha^2 - y^2}\text{; folglich}$$

$k.y_o = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha^2}\int y^2.\sqrt{r^2\cos\alpha^2 - y^2}.dy$ und hieraus

$$k.y_o = \frac{\sin\alpha}{8\cos\alpha^2}\left[r^4\cos\alpha^4 \operatorname{Arc}\sin\frac{y}{r\cos\alpha} + (2y^2 - r^2\cos\alpha^2)y\sqrt{r^2\cos\alpha^2 - y^2}\right];$$

folglich für $y = r\cos\alpha$; das Moment $K.y_o = \frac{\pi.r^4.\sin\alpha\cos^2\alpha}{16}$ und daher die Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Körpers von $XZ = \frac{3\pi}{16}.r\cos\alpha$.

B. In Beziehung auf YZ als Momenten-Ebene.

Aus $k.x_o = \int^3 x\,dy\,dz\,dx$ folgt $k.x_o = \int^2 \frac{1}{2}x^2\,dy\,dz$ zwischen $x^2 = r^2 - y^2\sec\alpha^2$ und $x = o$; also

$k.x_o = \frac{1}{2\cos\alpha^2}\cdot\int[r^2\cos\alpha^2 - y^2]\,dy\,dz$, folglich

$k.x_o = \frac{1}{2\cos\alpha^2}\cdot\int[r^2\cos\alpha^2 - y^2].z\,dy$ zwischen $z = y\operatorname{tg}\alpha$ und $z = o$; daher

$k.x_o = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha^3}\cdot\int[r^2\cos\alpha^2 - y^2]y\,dy$ und hieraus

$k.x_o = \frac{\sin\alpha}{8\cos\alpha^3}\cdot y^2[2r^2\cos\alpha^2 - y^2]$; also

$K.x_o = \frac{r^4\sin 2\alpha}{16}$; $x_o = \frac{3}{8}r$.

C. In Beziehung auf die Momenten-Ebene XY.

Aus $k.z_o = \int^3 z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int^2 z^2\,dx\,dy$

$= \frac{\sin\alpha^2}{2\cos\alpha^2}\int^2 y^2\,dx\,dy$, folgt

$k.z_o = \frac{\sin\alpha^2}{2\cos\alpha^2}\int y^2 x\,dy = \frac{\sin\alpha^2}{2\cos\alpha^2}\cdot\int y^2.\sqrt{r^2 - y^2\sec\alpha^2}\,dy$

und also ist

$$k.z_o = \frac{\sin\alpha^2}{16\cos\alpha^3}\left[r^4\cos\alpha^4 \operatorname{Arc}\sin\frac{y}{r\cos\alpha} + (2y^2 - r^2\cos\alpha^2)y\sqrt{r^2\cos\alpha^2 - y^2}\right],$$ woraus

$K.z_o = \frac{r^4\sin\alpha^2\cos\alpha\pi}{32}$ und $z_o = \frac{3\pi}{32}r\sin\alpha$ folgt.

V. Bestimmung des Momentes für den Körper k in II.

A. Für YZ als Momenten-Ebene.

Aus $k.x_0 = x\frac{\mathrm{Sin}2\alpha}{4}(r^2-x^2)$ folgt

$$k.x_0 = \frac{\mathrm{Sin}2\alpha}{16}(2r^2-x^2)x^2\text{, also}$$

$$K.x_0 = \frac{\mathrm{Sin}2\alpha}{16}.r^4;\ x_0 = \tfrac{3}{4}r.$$

B. Für XY als Momenten-Ebene.

Es ist $k.z_0 = \frac{1}{2}\int^2 z^2\,dx\,dy$ zwischen $z = y\,\mathrm{tg}\,\alpha$ und o; also

$$k.z_0 = \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha^2.\int^2 y^2\,dx\,dy = \tfrac{1}{6}\mathrm{tg}\,\alpha^2.\int y^3\,dx$$

zwischen $y = \mathrm{Cos}\,\alpha\sqrt{r^2-x^2}$ und o; daher

$$k.z_0 = \tfrac{1}{6}\mathrm{tg}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^3.\int(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \text{ und hieraus}$$

$$k.z_0 = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{48}\Big[(5r^2-2x^2)x\sqrt{r^2-x^2}$$

$$+3r^4\,\mathrm{ArcSin}\frac{x}{r}\Big];\text{ woraus auch, für } x=r,$$

$$K.z_0 = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\pi}{32}r^4;\ z_0 = \frac{3\pi}{32}r\,\mathrm{Sin}\,\alpha \text{ folgt.}$$

C. Für XZ als Ebene der Momente.

Hier ist $k.y_0 = \int^3 y\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int^2 y^2\,dx\,dz$ zwischen

$y = \mathrm{Cos}\,\alpha\sqrt{r^2-x^2}$ und $y = z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$; also

$$k.y_0 = \int^2\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\alpha^2(r^2-x^2) - \tfrac{1}{2}z^2\,\mathrm{Cotg}\,\alpha^2\right]dx\,dz$$

$$= \int\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\alpha^2(r^2-x^2).z - \tfrac{1}{6}\mathrm{Cotg}\,\alpha^2.z^3\right]dx$$

zwischen den Grenzen $\mathrm{Sin}\,\alpha\sqrt{r^2-x^2}$ und o; daher

$$k.y_0 = \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2.\int[r^2-x^2]^{\frac{3}{2}}dx;\text{ und hieraus}$$

$$k.y_0 = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}{24}\Big[(5r^2-2x^2)x\sqrt{r^2-x^2}+3r^4\,\mathrm{ArcSin}\frac{x}{r}\Big].$$

VI. Bestimmung des Momentes des Körpers, $\mp$ XY abgeschnitten, in III.

A. Für XY als Ebene der Momente:

Nach III. kann man sogleich setzen

$$k.z_0 = \int\left[\frac{r^2\,\mathrm{Cos}\alpha}{2}z.\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\alpha} - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\alpha^2}.z^2.\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2 - z^2}.\right]dz,$$

und erhält hieraus durch Integration

$$k.z_0 = \frac{r^2z^2\mathrm{Cos}\alpha}{4}\mathrm{Arc\,Cos}\frac{z}{r\mathrm{Sin}\alpha} + \frac{r^4\mathrm{Sin}\alpha^2\mathrm{Cos}\alpha}{16}\mathrm{Arc\,Sin}\frac{z}{r\mathrm{Sin}\alpha} - \frac{z\,(2z^2 + r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2)\,\mathrm{Cos}\alpha}{16\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2}\,.$$

B. Für YZ als Ebene der Momente.

Aus $k.x_0 = \int^3 x\,dx\,dy\,dz$ folgt $k.x_0 = \int^2 xy\,dz\,dx$ zwischen $y = \mathrm{Cos}\alpha\sqrt{r^2 - x^2}$ und $y = z\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$; also

$k.x_0 = \int[x\,\mathrm{Cos}\alpha\sqrt{r^2 - x^2} - zx\,\mathrm{Cotg}\alpha]\,dx\,dz$, und hieraus

$$k.x_0 = \int\left[-\frac{\mathrm{Cos}\alpha}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2z}{2}\mathrm{Cotg}\alpha\right]dz$$ zwischen

$x^2 = r^2 - z^2\,\mathrm{Cosec}\alpha^2$ und $x = o$; also

$$k.x_0 = \int\left[\frac{\mathrm{Cos}\alpha}{3}.r^3 + \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{6\,\mathrm{Sin}\alpha^3}.z^3 - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{2\,\mathrm{Sin}\alpha}r^2z\right]dz;$$ folglich

$$k.x_0 = \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{3}.r^3z + \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{24\,\mathrm{Sin}\alpha^3}.z^4 - \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{4\,\mathrm{Sin}\alpha^2}.r^2z^2$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{24\,\mathrm{Sin}\alpha^3}.z\,[z^3 - 6r^2\,\mathrm{Sin}\alpha^2.z + 8r^3\,\mathrm{Sin}\alpha^3]\,.$$

C. Für XZ als Momenten-Ebene.

Es ist $k.y_0 = \int^3 y\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int^2 y^2\,dx\,dz$

$$= \int^2\left[\frac{\mathrm{Cos}\alpha^2}{2}[r^2 - x^2] - \frac{\mathrm{Cos}\alpha^2}{2\,\mathrm{Sin}\alpha^2}z^2\right]dx\,dz$$

$$= \int\left[\frac{\mathrm{Cos}\alpha^2}{2}(r^2x - \frac{x^3}{3}) - \frac{\mathrm{Cos}\alpha^2}{2\,\mathrm{Sin}\alpha^2}.x.z^2\right]dz$$

zwischen $x = \sqrt{r^2 - z^2\,\mathrm{Cosec}\alpha^2}$ und $x = o$; folglich

$$k \cdot y_o = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha^2}{3\,\mathrm{Sin}\,\alpha^3} \int [r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2]^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha^2}{24\,\mathrm{Sin}\,\alpha^3} \left[[5r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - 2z^2]\,z\sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 - z^2} \right.$$

$$\left. + 3r^4\,\mathrm{Sin}\,\alpha^4\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{z}{r\,\mathrm{Sin}\,\alpha} \right] .$$

Aufgabe XXII.

Zwei kleine Kreise einer Kugel schneiden sich unter dem Winkel α, die Oberfläche F des entstehenden Zweiecks, den Schwerpunct von F und den körperlichen Inhalt K des Kugelausschnitts zu bestimmen.

I. Bestimmung von F.

Ist AD (Fig. 19.) die Durchschnittslinie beider Kreise; $AG = GD = h$; GB normal auf AD in dem einen, und GC normal auf AD in dem andern Kreis, also $CGB = \alpha$; der Halbmesser der Kugel $= r$; die Normale aus dem Mittelpunct M derselben auf den ersten Kreis, also $ME = a$; der Abstand $EG = b$, folglich

1) $r^2 = a^2 + b^2 + h^2$; ferner ADH eine durch AD gelegte Polar-Ebene unter dem veränderlichen Winkel $HGB = \theta$; und $GK = R$ ein Radius vector in dieser Ebene unter dem veränderlichen Winkel $AGK = \varphi$ mit AG, so ist

2) $F = \int\int R . \sqrt{R^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 + \partial R_\varphi{}^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 + \partial R_\theta{}^2}\, d\varphi . d\theta$,

welches Doppel-Integral zuerst nach φ zwischen den Grenzen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ und dann nach θ, zwischen den Grenzen $\theta = \alpha$ und $\theta = 0$ zu integriren ist.

Um nun zuerst R als Function von φ und θ auszudrücken, bezeichne p die Länge GH und ρ den Halbmesser dieser Polar-Ebene, so ist

3) $\frac{1}{2}[a + p \operatorname{Sin}\theta]^2 + [b + p \operatorname{Cos}\theta]^2 = r^2$; oder

4) $p^2 = -2(a \operatorname{Sin}\theta + b \operatorname{Cos}\theta)\, p + h^2$; oder auch, wenn $a \operatorname{Sin}\theta + b \operatorname{Cos}\theta = c \operatorname{Sin}(\theta + \beta)$ gesetzt wird, so daß

5) $c\,\mathrm{Cos}\,\beta = a$

6) $c\,\mathrm{Sin}\,\beta = b$ also auch

7) $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$ und

8) $c^2 = a^2 + b^2$ ist; wenn man dann noch

9) $\theta + \beta$ durch ε bezeichnet,

10) $p^2 = -2c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon . p + h^2$ und hieraus, und aus

11) $p : h = h : 2\varrho - p$ und

12) $p - R . \mathrm{Sin}\,\varphi : R\,\mathrm{Cos}\,\varphi = R\,\mathrm{Cos}\,\varphi : 2\varrho - p + R\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, folgt dann

13) $R^2 = -2c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varphi . R + h^2$; also

14) $R = -c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}$.

Aus 14) entspringt nun

15) $\partial R_\varphi = -\frac{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,R}{\sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}$ und

16) $\partial R_\theta = \partial R_\varepsilon = -\frac{c\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varphi . R}{\sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}$ und substituirt man beide Werthe in 2), so entsteht

17) $F = r . \iint \frac{R^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,d\varphi\,d\theta}{\sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}$. Wird hierin der Werth für R aus 13) und 14) substituirt, so ergiebt dann die Integration nach φ

18) $F = r \int \Big[-\mathrm{Cos}\,\varphi \sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}$

$- c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2}} - c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\Big] d\varepsilon$

also zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ genommen

19) $F = 2r \int \Big[h - \frac{\pi}{2} c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{h} \Big] d\varepsilon$

$= 2r \int \Big[h - c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon} \Big] d\varepsilon$

$= 2r \Big[h\varepsilon + c \int \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon} . \partial\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon_\varepsilon . d\varepsilon \Big]$,

oder theilweise integrirt

$$20)\ F=2r\left[h\varepsilon+c\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}+hc^2\int\frac{\mathrm{Cos}\varepsilon^2\,d\varepsilon}{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2}\right]$$

$$=2r\left[c\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}+hr^2\int\frac{d\varepsilon}{r^2-c^2\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2}\right].$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche ergiebt sich aber für das zweite Glied in den Klammern

$$\frac{r}{2}\left[\mathrm{Arctg}\frac{h\,\mathrm{Sin}\varepsilon}{r\,\mathrm{Cos}\varepsilon+c}+\mathrm{Arctg}\frac{h\,\mathrm{Sin}\varepsilon}{r\,\mathrm{Cos}\varepsilon-c}\right]\text{ oder}$$

$$\frac{r}{2}\mathrm{Arctg}\frac{2rh\,\mathrm{tg}\varepsilon}{h^2-r^2\,\mathrm{tg}\varepsilon^2}\ ;\ \text{oder [nach der Formel}$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{2a}{1-a^2}=2\,\mathrm{Arctg}\,a]\ r\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{r}{h}\mathrm{tg}\varepsilon\right);\ \text{und also ist}$$

$$21)\ F=2r\left[c\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}\right)+r\,\mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{tg}\varepsilon}{h}\right]$$

zwischen den angegebenen Grenzen $\theta=\alpha$ und $\theta=0$ oder $\varepsilon=\alpha+\beta$ und $\varepsilon=\beta$, so daß folglich

$$22)\ F=2r\left[(a\,\mathrm{Cos}\alpha-b\,\mathrm{Sin}\alpha)\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{a\,\mathrm{Sin}\alpha+b\,\mathrm{Cos}\alpha}\right.$$

$$\left.-a\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b}+r\,\mathrm{Arctg}\frac{hr\,\mathrm{Sin}\alpha}{ab\,\mathrm{Sin}\alpha+(b^2+h^2)\,\mathrm{Cos}\alpha}\right]$$

entsteht, in welcher Formel $h^2=r^2-a^2-b^2$ ist.

Beispiele. 1. Für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ entspringt aus der Endformel 22)

$$F=2r\left[r\,\mathrm{Arctg}\frac{hr}{ab}-a\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b}-b\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{a}\right].$$

2. Für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ und $b=0$; folgt, wenn m und n jede positive ungerade Zahl bezeichnen

$$F=2r\left[r.m.\frac{\pi}{2}-a.n.\frac{\pi}{2}\right];$$

das schon bekannte Resultat dieses Falls ist aber $r\pi(r-a)$; woraus erhellet, daß $m=n=1$ ist.

3. Für $\alpha=\pi$ entspringt

$$F=2r\left[a\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b}-a\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b}+r\,\mathrm{Arctg}\frac{rb}{ah}-r\,\mathrm{Arctg}\frac{rb}{ah}\right]$$

$$=2r[a\,\mathrm{Arctg}\,0+r\,\mathrm{Arctg}\,0],$$

worinnen das schon bekannte Resultat dieses Falls, nehmlich $2r\pi(r-a)$; wie in 2) enthalten ist.

4. Für $a=o$ folgt

$$F=2r\left[r\,\mathrm{Arctg}\frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r}-b\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\right].$$

5. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$, so entsteht, weil dann $h=o$ ist,

$$F=2r\left[(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a)\,\mathrm{Arctg}\,o+r\,\mathrm{Arctg}\,o\right],$$

folglich, weil dieser Ausdruck mit α zugleich verschwinden muß, bloß

$$F=2r\left[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a\right]m.\pi$$

unter m, o und jede ganze Zahl verstanden.

Für $\mathrm{Cos}\,\alpha=\frac{a}{r}$ muß $F=2r\pi(r-a)$ werden, und aus der Gleichsetzung erhellet, $m=1$; daher

$$F=2r\pi\left[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a\right].$$

6. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$ und $a=o$; also $b=-r$, so entsteht aus 5) $F=2r^2\pi\,\mathrm{Sin}\,\alpha$. Berühren sich also ein größter Kreis und ein kleiner derselben Kugel, und bilden beide Ebenen einen Winkel von 30°, so ist das sphärische Zweieck gleich der größten Kreisebene, und $=\frac{1}{3}$ mal der kleineren Kreisebene.

II. Bestimmung des Momentes M von F in Beziehung auf die Ebene ABD.

Nach I. 17) ist das Flächen-Element in K gleich

$$r.\frac{R^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}.d\varphi_{,}d\varepsilon\ ,$$

und wei der Hebelsarm desselben $=R\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta$ ist, so folgt

$$1)\ M=r\iint\frac{R^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\theta}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}d\varphi_{,}d\varepsilon$$

zuerst nach φ zwischen den Grenzen π und o; und dann nach θ zwischen den Grenzen α und o, oder nach ε zwischen den Grenzen $\alpha+\beta$ und β integrirt.

Substituirt man den Werth für R aus I., so entsteht:

$$2)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon \int \Big[\frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^5}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}} + 4c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4 + h^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\Big]\,d\varphi\,.$$

Es ist aber

$$\int \frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$\mathrm{Sin}\varphi$ durch $\mathrm{Cos}\varphi$ ausgedrückt, und $c\,\mathrm{Sin}\varepsilon$ durch p_1, $h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2$ durch t^2 bezeichnet, einerlei mit

$$4p_1^3\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^4\,\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi\,d\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}} - (8p_1^3+3h^2p_1)\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^2\,\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$$+ (4p_1^3+3h^2p_1)\int \frac{\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi\,,$$

woraus nach Anwendung der hieher gehörigen Integralformeln, die Stammfunction

$$\tfrac{1}{2}(5-2\,\mathrm{Cos}\varphi^2)\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\,.\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(3p_1^2+h^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t}$$ sich ergiebt.

Ferner ist $4p_1^2\int \mathrm{Sin}\varphi^4\,d\varphi + h^2\int \mathrm{Sin}\varphi^2\,d\varphi$

$= -p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\,\mathrm{Cos}\varphi + \tfrac{1}{4}(h^2+3p_1^2)(\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi)$ und demnach

$$3)\ M = \frac{r}{2}\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon\Big[[5-2\,\mathrm{Cos}\varphi^2]\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\sqrt{h^2+p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}$$

$$+(h^2+3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t} - 2p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2\,\mathrm{Cos}\varphi$$

$$+(h^2+3p_1^2)[\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi]\Big]$$

den Werth in den Klammern zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ genommen, wodurch

$$4)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon\Big[-3p_1h_1 + (h^2+3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{p_1}{t}\Big]$$ entsteht.

Werden die Werthe für p_1 und t nun wieder eingeführt und $\varepsilon - \beta$ für θ geschrieben, so hat man

worinnen das schon bekannte Resultat dieses Falls, nehmlich $2r\pi(r-a)$; wie in 2) enthalten ist.

4. Für $a=o$ folgt

$$F=2r\left[r\,\mathrm{Arctg}\frac{h\,tg\alpha}{r}-b\,\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b\,\mathrm{Cos}\alpha}\right].$$

5. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$, so entsteht, weil dann $h=o$ ist,

$$F=2r\left[(a\,\mathrm{Cos}\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,\mathrm{Sin}\alpha-a)\,\mathrm{Arctg}\,o+r\,\mathrm{Arctg}\,o\right],$$

folglich, weil dieser Ausdruck mit α zugleich verschwinden muß, bloß

$$F=2r\left[a\,\mathrm{Cos}\alpha+\sqrt{r^2-a^2}.\,\mathrm{Sin}\alpha-a\right]m.\pi$$

unter m, o und jede ganze Zahl verstanden.

Für $\mathrm{Cos}\alpha=\frac{a}{r}$ muß $F=2r\pi(r-a)$ werden, und aus der Gleichsetzung erhellet, $m=1$; daher

$$F=2r\pi\left[a\,\mathrm{Cos}\alpha+\sqrt{r^2-a^2}.\,\mathrm{Sin}\alpha-a\right].$$

6. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$ und $a=o$; also $b=-r$, so entsteht aus 5) $F=2r^2\pi\,\mathrm{Sin}\alpha$. Berühren sich also ein größter Kreis und ein kleiner derselben Kugel, und bilden beide Ebenen einen Winkel von 30°, so ist das sphärische Zweieck gleich der größten Kreisebene, und $=\frac{1}{3}$ mal der kleineren Kreisebene.

II. Bestimmung des Momentes M von F in Beziehung auf die Ebene ABD.

Nach I. 17) ist das Flächen-Element in K gleich

$$r.\frac{R^2\,\mathrm{Sin}\varphi}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}.d\varphi.d\varepsilon,$$

und wei der Hebelsarm desselben $=R\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}\theta$ ist, so folgt

$$1)\quad M=r\iint\frac{R^3\,\mathrm{Sin}\varphi^2\,\mathrm{Sin}\theta}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}d\varphi.d\varepsilon$$

zuerst nach φ zwischen den Grenzen π und o; und dann nach θ zwischen den Grenzen α und o, oder nach ε zwischen den Grenzen $\alpha+\beta$ und β integrirt.

Substituirt man den Werth für R aus I., so entsteht:

$$2)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon \int \Big[\frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^5}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}} + 4c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^4 + h^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2\Big]\,d\varphi\,.$$

Es ist aber

$$\int \frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$\mathrm{Sin}\varphi$ durch $\mathrm{Cos}\varphi$ ausgedrückt, und $c\,\mathrm{Sin}\varepsilon$ durch p_1, $h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2$ durch t^2 bezeichnet, einerlei mit

$$4p_1^3\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^4\,\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi\,d\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\mathrm{Cos}\varphi^2}} - (8p_1^3+3h^2p_1)\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^2\,\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi + (4p_1^3+3h^2p_1)\int \frac{\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi\,,$$

woraus nach Anwendung der hieher gehörigen Integralformeln, die Stammfunction

$$\tfrac{1}{2}(5-2\,\mathrm{Cos}\varphi^2)\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\,.\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2} + \tfrac{1}{2}(3p_1^2+h^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t}$$

sich ergiebt.

Ferner ist $4p_1^2\int \mathrm{Sin}\varphi^4\,d\varphi + h^2\int \mathrm{Sin}\varphi^2\,d\varphi$

$= -p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\,\mathrm{Cos}\varphi + \tfrac{1}{4}(h^2+3p_1^2)(\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi)$ und demnach

$$3)\ M = \frac{r}{2}\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon\Big[[5-2\,\mathrm{Cos}\varphi^2]\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\sqrt{h^2+p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2} + (h^2+3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t} - 2p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2\,\mathrm{Cos}\varphi + (h^2+3p_1^2)[\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi]\Big]$$

den Werth in den Klammern zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ genommen, wodurch

$$4)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon\Big[-3p_1h_1 + (h^2+3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{p_1}{t}\Big]$$ entsteht.

Werden die Werthe für p_1 und t nun wieder eingeführt und $\varepsilon - \beta$ für θ geschrieben, so hat man

worinnen das schon bekannte Resultat dieses Falls, nehmlich $2r\pi(r-a)$; wie in 2) enthalten ist.

4. Für $a=o$ folgt

$$F=2r\left[r\,\mathrm{Arctg}\frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r}-b\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\right].$$

5. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$, so entsteht, weil dann $h=o$ ist,

$$F=2r\left[(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a)\,\mathrm{Arctg}\,o+r\,\mathrm{Arctg}\,o\right],$$

folglich, weil dieser Ausdruck mit α zugleich verschwinden muß, bloß

$$F=2r\left[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}.\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a\right]m.\pi$$

unter m, o und jede ganze Zahl verstanden.

Für $\mathrm{Cos}\,\alpha=\frac{a}{r}$ muß $F=2r\pi(r-a)$ werden, und aus der Gleichsetzung erhellet, $m=1$; daher

$$F=2r\pi\left[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}.\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a\right].$$

6. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$ und $a=o$; also $b=-r$, so entsteht aus 5) $F=2r^2\pi\,\mathrm{Sin}\,\alpha$. Berühren sich also ein größter Kreis und ein kleiner derselben Kugel, und bilden beide Ebenen einen Winkel von 30°, so ist das sphärische Zweieck gleich der größten Kreisebene, und $=\frac{1}{3}$ mal der kleineren Kreisebene.

II. Bestimmung des Momentes M von F in Beziehung auf die Ebene ABD.

Nach I. 17) ist das Flächen-Element in K gleich

$$r.\frac{R^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}.d\varphi.d\varepsilon,$$

und wei der Hebelsarm desselben $=R\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta$ ist, so folgt

$$1)\quad M=r\iint\frac{R^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\theta}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}d\varphi.d\varepsilon$$

zuerst nach φ zwischen den Grenzen π und o; und dann nach θ zwischen den Grenzen α und o, oder nach ε zwischen den Grenzen $\alpha+\beta$ und β integrirt.

Substituirt man den Werth für R aus I., so entsteht:

$$2)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon \int \Big[\frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^3}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}$$

$$+4c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4 + h^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\Big]\,d\varphi\ .$$

Es ist aber

$$\int \frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$\mathrm{Sin}\varphi$ durch $\mathrm{Cos}\varphi$ ausgedrückt, und $c\,\mathrm{Sin}\varepsilon$ durch p_1, $h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2$ durch t^2 bezeichnet, einerlei mit

$$4p_1^3\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^4\,\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi\,d\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\mathrm{Cos}\varphi^2}} - (8p_1^3+3h^2p_1)\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^2\,\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$$+(4p_1^3+3h^2p_1)\int \frac{\partial\mathrm{Cos}\varphi_\varphi}{\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi\ ,$$

woraus nach Anwendung der hieher gehörigen Integralformeln, die Stammfunction

$$\tfrac{1}{2}(5-2\,\mathrm{Cos}\varphi^2)\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\,.\sqrt{t^2-p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(3p_1^2+h^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t}$$ sich ergiebt.

Ferner ist $4p_1^2\int \mathrm{Sin}\varphi^4\,d\varphi + h^2\int \mathrm{Sin}\varphi^2\,d\varphi$

$= -p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\,\mathrm{Cos}\varphi + \tfrac{1}{4}(h^2+3p_1^2)(\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi)$ und demnach

$$3)\ M = \frac{r}{2}\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon\Big[[5-2\,\mathrm{Cos}\varphi^2]\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\sqrt{h^2+p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}$$

$$+(h^2+3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t} - 2p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2\,\mathrm{Cos}\varphi$$

$$+(h^2+3p_1^2)[\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi]\Big]$$

den Werth in den Klammern zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ genommen, wodurch

$$4)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon\Big[-3p_1h_1 + (h^2+3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{p_1}{t}\Big]$$ entsteht.

Werden die Werthe für p_1 und t nun wieder eingeführt und $\varepsilon - \beta$ für θ geschrieben, so hat man

worinnen das schon bekannte Resultat dieses Falls, nehmlich $2r\pi(r-a)$; wie in 2) enthalten ist.

4. Für $a=o$ folgt

$$F=2r\left[r\,\mathrm{Arctg}\frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r}-b\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\right].$$

5. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$, so entsteht, weil dann $h=o$ ist,

$$F=2r\left[(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a)\,\mathrm{Arctg}\,o+r\,\mathrm{Arctg}\,o\right],$$

folglich, weil dieser Ausdruck mit α zugleich verschwinden muß, bloß

$$F=2r\left[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a\right]m.\pi$$

unter m, o und jede ganze Zahl verstanden.

Für $\mathrm{Cos}\,\alpha=\frac{a}{r}$ muß $F=2r\pi(r-a)$ werden, und aus der Gleichsetzung erhellet, $m=1$; daher

$$F=2r\pi\left[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\sqrt{r^2-a^2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha-a\right].$$

6. Ist $b=-\sqrt{r^2-a^2}$ und $a=o$; also $b=-r$, so entsteht aus 5) $F=2r^2\pi\,\mathrm{Sin}\,\alpha$. Berühren sich also ein größter Kreis und ein kleiner derselben Kugel, und bilden beide Ebenen einen Winkel von 30°, so ist das sphärische Zweieck gleich der größten Kreisebene, und $=\frac{1}{3}$ mal der kleineren Kreisebene.

II. Bestimmung des Momentes M von F in Beziehung auf die Ebene ABD.

Nach I. 17) ist das Flächen-Element in K gleich

$$r.\frac{R^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}.d\varphi.d\varepsilon,$$

und wei der Hebelsarm desselben $=R\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\theta$ ist, so folgt

$$1)\quad M=r\iint\frac{R^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\theta}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}d\varphi.d\varepsilon$$

zuerst nach φ zwischen den Grenzen π und o; und dann nach θ zwischen den Grenzen α und o, oder nach ε zwischen den Grenzen $\alpha+\beta$ und β integrirt.

Substituirt man den Werth für R aus I., so entsteht:

$$2)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon \int \Big[\frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^2 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4}{\sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}$$

$$+ 4c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4 + h^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2 \Big]\,d\varphi\ .$$

Es ist aber

$$\int \frac{-3ch^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\varphi^3 - 4c^3\,\mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Sin}\varphi^4}{\sqrt{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$\mathrm{Sin}\varphi$ durch $\mathrm{Cos}\varphi$ ausgedrückt, und $c\,\mathrm{Sin}\varepsilon$ durch p_1, $h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2$ durch t^2 bezeichnet, einerlei mit

$$4p_1^3 \int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^4\,\partial\mathrm{Cos}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{t^2 - p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}} - (8p_1^3 + 3h^2p_1)\int \frac{\mathrm{Cos}\varphi^2\,\partial\mathrm{Cos}\varphi}{\sqrt{t^2 - p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi$$

$$+ (4p_1^3 + 3h^2p_1)\int \frac{\partial\mathrm{Cos}\varphi}{\sqrt{t^2 - p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}}\,d\varphi\ ,$$

woraus nach Anwendung der hieher gehörigen Integralformeln, die Stammfunction

$$\tfrac{1}{2}(5 - 2\,\mathrm{Cos}\varphi^2)\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\,\sqrt{t^2 - p_1^2\,\mathrm{Cos}\varphi^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(3p_1^2 + h^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t}$$ sich ergiebt.

Ferner ist $4p_1^2 \int \mathrm{Sin}\varphi^4\,d\varphi + h^2 \int \mathrm{Sin}\varphi^2\,d\varphi$

$= -p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\,\mathrm{Cos}\varphi + \tfrac{1}{4}(h^2 + 3p_1^2)(\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi)$ und demnach

$$3)\ M = \frac{r}{2}\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon \Big[[5 - 2\,\mathrm{Cos}\varphi^2]\,p_1\,\mathrm{Cos}\varphi\,\sqrt{h^2 + p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^2}$$

$$+ (h^2 + 3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{p_1\,\mathrm{Cos}\varphi}{t} - 2p_1^2\,\mathrm{Sin}\varphi^3\,\mathrm{Cos}\varphi$$

$$+ (h^2 + 3p_1^2)[\varphi - \mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi] \Big]$$

den Werth in den Klammern zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ genommen, wodurch

$$4)\ M = r\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\varepsilon \Big[-3p_1h_1 + (h^2 + 3p_1^2)\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{p_1}{t} \Big]$$ entsteht.

Werden die Werthe für p_1 und t nun wieder eingeführt und $\varepsilon - \beta$ für θ geschrieben, so hat man

$$5)\ M = r\int \frac{a\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - b\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon}{c}\cdot\Big[-3ch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + [h^2 + 3c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2]\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\Big]\,d\varepsilon$$

$$= \frac{r}{c}\Big[-3ach\int \mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 + 3bch\int \mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + \int [ah^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + 3ac^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^3 - bh^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - 3bc^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon]\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\Big]$$

$$= \frac{r}{2c}\Big[-3ach\,[\varepsilon - \mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon] + 3bch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 - 2\int \mathrm{Arctg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\cdot\partial\,[a(h^2+2c^2)\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + bh^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + ac^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + bc^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^3]_\varepsilon\Big]$$

oder, theilweise integrirt

$$M = \frac{r}{2c}\Big[-3ach\,\varepsilon + 3ach\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + 3bch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 - 2.[(a\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + b\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)(h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2) + 2ac^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon]\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon} - 2ch\int\Big[a\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + b\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + \frac{2ac^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon}{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2}\Big]\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\Big].$$

Weil nun aber das letzte dieser Glieder

$$= -ach\,\varepsilon - ach\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - bch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 - 4ach\int \frac{c^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2}{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2}$$

ist, so entsteht

$$M = \frac{r}{c}\Big[ach\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + bch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 - [(a\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + b\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon)(h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2) + 2ac^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon]\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon} - 2ach\,(h^2+c^2)\int \frac{d\varepsilon}{h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2}\Big];$$ oder, nach I. 20)

$$6)\ M = \frac{r}{c}\Big[ach\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + bch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 - 2acr\,\mathrm{Arctg}\,\frac{r\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{h} - \Big[[a\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + b\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon]\,[r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2] + 2ac^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\Big]\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\Big].$$

Wird nun dieſes Reſultat zwiſchen den Grenzen $\alpha+\beta$ und β genommen, ſo erhält man, die Werthe für β aus I. 5), 6), 7), 8) ſubſtituirt, das verlangte Moment:

$$7)\ M=r\Big[ah\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha-bh\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2+(r^2+a^2)\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{b}$$
$$-2ar\,\mathrm{Arctg}\frac{hr\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{ab\,\mathrm{Sin}\,\alpha+(b^2+h^2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$$
$$-\Big[r^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha+(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha-b\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,[a+a\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2+b\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha]\Big]$$
$$\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{a\,\mathrm{Sin}\,\alpha+b\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\Big]\,.$$

Beiſpiele. 1. Für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ entſteht

$$M=r\Big[-bh+(r^2+a^2)\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{b}-2ar\,\mathrm{Arctg}\,\frac{hr}{ab}+2ab\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{a}\Big]$$

2) Für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ und $b=o$ folgt

$$M=\frac{r\pi}{2}(r-a)^2\,.$$

3) Für $\alpha=\pi$;

$$M=r\pi(r-a)^2\,.$$

4) Für $a=o$;

$$M=r\Big[-bh\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2+r^2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{b}-[r^2-b^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2]\,\mathrm{Cos}\,\alpha\times$$
$$\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{b\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\Big]\,.$$

5) Für $a=o$ und $\alpha=\frac{\pi}{2}$;

$$M=r\Big[-bh+r^2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{b}\Big]\,.$$

6) Für $b=-\sqrt{r^2-a^2}$ erhält man, wie in I. 5)

$$M=r\big[(r^2+a^2)(1-\mathrm{Cos}\,\alpha)+(r^2-2a^2)\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$
$$-2a\sqrt{r^2-a^2}\,\mathrm{Sin}\,\alpha^3\big]\pi\,.$$

7) Für $b=-\sqrt{r^2-a^2}$ und $a=o$ ergiebt ſich

$$M=r^3\pi[1-\mathrm{Cos}\,\alpha^3]$$

und also die Entfernung des Schwerpuncts dieser Fläche vom größten Kreis als Grundebene $= r \cdot \frac{1-\mathrm{Cos}\,\alpha^3}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha}$.

III. Bestimmung des Momentes M′ von F in Beziehung auf die durch AD normal auf ABD gelegte Ebene.

Das Flächen-Element in K ist

$$= r\,\frac{R^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}\,d\varphi\,.\,d\varepsilon\,,$$

und der Hebelsarm desselben

$$= R\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\theta\,;\ \text{daher}$$

$$M' = r\iint \frac{R^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\theta}{\sqrt{h^2+c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}}\,.\,d\varphi\,.\,d\varepsilon\,,$$

und hieraus, ganz wie in II. bis 4)

$$1)\ M' = r\int \mathrm{Cos}\,\theta\,.\,d\varepsilon\,.\left[-3ph + (h^2+3p_1^2)\,\mathrm{ArcCos}\,\frac{p_1}{t}\right]$$

oder, so wie in II. 5)

$$2)\ M' = \frac{r}{c}\int [a\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + b\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon]\left[-3ch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + (h^2+3c^2\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2)\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\right]d\varepsilon$$

woraus allmälig, (so wie 6) in II.) entspringt

$$3)\ M' = \frac{r}{c}\left[+bch\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - ach\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon^2 - 2bcr\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{r\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{h}\right.$$

$$\left. + [(a\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - b\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)(r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2) - 2bc^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon]\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}\right].$$

Zwischen den Grenzen $\alpha+\beta$ und β wird daher:

$$4)\ M' = r\left[-bh\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha - ah\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + 2ab\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{h}{b}\right.$$

$$- 2br\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{hr\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{ab\,\mathrm{Sin}\,\alpha + (b^2+h^2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

$$\left. + [r^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha - (a\,\mathrm{Cos}\,\alpha - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha)[b + b\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + a\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha]\right.$$

$$\left.\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{h}{a\,\mathrm{Sin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\right].$$

Beiſpiel. 1. Iſt $b = -\sqrt{r^2 - a^2}$, ſo entſteht, wie in I. 5)

$$M' = r\left[(2r^2 - a^2)\operatorname{Sin}\alpha + (r^2 - 2a^2)\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha^2 - 2a(1 - \operatorname{Cos}\alpha^3)\sqrt{r^2 - a^2}\right]\pi$$

2. Für $b = -\sqrt{r^2 - a^2}$ und $a = o$; folgt

$$M' = r^3\pi\operatorname{Sin}\alpha\left[2 + \operatorname{Cos}\alpha^2\right].$$

IV. Beſtimmung des Orts des Schwerpuncts.

Da GBC eine Schwerebene iſt, alſo in ihr der geſuchte Schwerpunct liegt, ſo bedarf man nur die Abſciſſe GP und die Ordinate PQ deſſelben; erſtere iſt $= \frac{M'}{F}$; letztere $= \frac{M}{F}$.

Beiſpiel. Für $b = -\sqrt{r^2 - a^2}$ und $a = o$; hat man

$$\frac{M'}{F} = r\left[1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}\alpha^2\right]; \quad \frac{M}{F} = r.\frac{1 - \operatorname{Cos}\alpha^3}{2\operatorname{Sin}\alpha}.$$

V. Beſtimmung des körperlichen Inhalts k dieſes Kugelausſchnitts.

Es iſt

1) $K = \int^3 R'.R'\operatorname{Sin}\varphi\, dR'd\varphi d\theta$ zuerſt nach R' zwiſchen R und o; dann nach φ zwiſchen π und φ und zuletzt nach θ zwiſchen α und o integrirt. Es entſteht hiernach

2) $K = \frac{1}{3}\int^2 R^3\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi d\theta$, oder den Werth für R aus I. 14) ſubſtituirt,

3) $K = \frac{1}{3}\int\left[-4c^3\operatorname{Sin}\varepsilon^3\int\operatorname{Sin}\varphi^4 d\varphi - 3ch^2\operatorname{Sin}\varepsilon\int\operatorname{Sin}\varphi^2 d\varphi + 4c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\int\sqrt{h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\operatorname{Sin}\varphi^2}.\operatorname{Sin}\varphi^3 d\varphi + h^2\int\sqrt{h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\operatorname{Sin}\varphi^2}.\operatorname{Sin}\varphi d\varphi\right] d\theta$

alſo, die Integrale entnommen,

4) $K = \frac{1}{3}\int\Big[c^3\operatorname{Sin}^3\operatorname{Sin}\varphi^3\operatorname{Cos}\varphi - \tfrac{3}{4}c\operatorname{Sin}\varepsilon \times \left[h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\right]\left[\varphi - \operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\right] - \operatorname{Cos}\varphi\left[h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\operatorname{Sin}\varphi^2\right]^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\operatorname{Sin}\varphi^2} - \tfrac{3}{2}c\operatorname{Sin}\varepsilon\left(h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2\right)\operatorname{ArcSin}\frac{c\operatorname{Sin}\varepsilon\operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{h^2 + c^2\operatorname{Sin}\varepsilon^2}}\Big] d\varphi;$

und daher, zwiſchen den erwähnten Grenzen

$$5)\ K = \tfrac{1}{3}\int\Big[-3c\,\mathrm{Sin}\varepsilon[h^2 + c^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2]\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} + 2h^3 + 3hc^2\,\mathrm{Sin}\varepsilon^2\Big]\,d\varepsilon -$$

$$= \tfrac{1}{3}\Big[2h^3\varepsilon + \tfrac{3}{2}hc^2[\varepsilon - \mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Cos}\varepsilon] - 3ch^2\int \mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}\,.\,d\varepsilon$$

$$- 3c^3\int \mathrm{Sin}\varepsilon^3\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}\,.\,d\varepsilon\Big]\,.$$

Es ist aber (wie in I.)

$$6)\ \int \mathrm{Sin}\varepsilon\,.\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}\,d\varepsilon = -\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} - ch\int\frac{\mathrm{Cos}\varepsilon^2}{r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2}\,.\,d\varepsilon$$

$$= -\mathrm{Cos}\varepsilon\,.\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} - ch\int\Big[-\frac{1}{c^2} + \frac{r^2}{c^2[r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2]}\Big]\,.\,d\varepsilon$$

$$= \mathrm{Cos}\varepsilon\,.\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} + \frac{h}{c}\varepsilon - \frac{r}{c}\,\mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{tg}\varepsilon}{h}\,;\ \text{und dann auch}$$

$$7)\ \int \mathrm{Sin}\varepsilon^3\,.\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon}\,d\varepsilon$$

$$= -\tfrac{1}{3}[2 + \mathrm{Sin}\varepsilon^2]\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} - \frac{ch}{3}\int\frac{[3 - \mathrm{Cos}\varepsilon^2]\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2}{r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2}\,.\,d\varepsilon$$

$$= -\tfrac{1}{3}[2 + \mathrm{Sin}\varepsilon^2]\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} - \frac{ch}{3}\int\Big[\frac{\mathrm{Cos}\varepsilon^2}{c^2} - \frac{3c^2 - r^2}{c^4} + \frac{r^2[3c^2 - r^2]}{c^4[r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2]}\Big]\,d\varepsilon$$

$$= -\tfrac{1}{3}[2 + \mathrm{Sin}\varepsilon^2]\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,.\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} - \frac{h}{6c}[\varepsilon + \mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Cos}\varepsilon]$$

$$+ \frac{h(3c^2 - r^2)}{3c^3}\,.\,\varepsilon - \frac{r(3c^2 - r^2)}{3c^3}\,\mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{tg}\varepsilon}{h}\,,$$

und also, wenn die Werthe aus 6) und 7) in 5) gesetzt werden

$$8)\ K = \tfrac{1}{3}\Big[-c^2\,h\,\mathrm{Sin}\varepsilon\,\mathrm{Cos}\varepsilon + [3r^2 - c^2\,\mathrm{Cos}\varepsilon^2]\times$$

$$c\,\mathrm{Cos}\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{c\,\mathrm{Sin}\varepsilon} + 2r^3\,\mathrm{Arctg}\frac{r\,\mathrm{tg}\varepsilon}{h}\Big]\,.$$

Wird nun dieses Integral zwischen den Grenzen $\varepsilon = \delta + \beta$ und $\varepsilon = \beta$ genommen, und mit I. 5), 6), 8) substituirt, so erhält man:

$$9)\quad K = \frac{1}{3}\Big[[2ab\,\mathrm{Sin}\,\alpha - (a^2-b^2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha]\,h\,\mathrm{Sin}\,\alpha - a[3r^2-a^2]\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b} + [3r^2-(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^2]\,[a\,\mathrm{Cos}\,\alpha - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha]\times \mathrm{Arctg}\frac{h}{a\,\mathrm{Sin}\,\alpha + b\,\mathrm{Cos}\,\alpha} + 2r^3\,\mathrm{Arctg}\frac{hr\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{ab\,\mathrm{Sin}\,\alpha + (b^2+h^2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha}\Big].$$

Beispiele. 1. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entsteht

$$K = \frac{1}{3}\Big[2abh - a(3r^2-a^2)\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{b} - b(3r^2-b^2)\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{a} + 2r^3\,\mathrm{Arctg}\frac{hr}{ab}\Big].$$

2. Für $\alpha = \pi$ enthält 9) die bekannte Formel für den Inhalt des Kugelabschnitts, nehmlich $\frac{\pi}{3}(2r^3 - 3ar^2 + a^3)$.

3) Ist b negativ und $= EG' = \sqrt{r^2 - a^2} = \varrho$, so daß also die zweite Kreisebene $G'C'$ die erstere $G'B$ in G' berührt, so entsteht, weil dann $h = o$ ist,

$$K = \frac{1}{3}\Big[-a(3r^2-a^2)\,\mathrm{Arctg}\,o + 2r^3\,\mathrm{Arctg}\,o + [3r^2-(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \varrho\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^2]\,(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \varrho\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,\mathrm{Arctg}\,o\Big],$$

in welcher Formel das erste und dritte Glied aus denselben allgemeinen Glied $[3r^2 - o^2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon^2]\,o\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Arctg}\frac{h}{o\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon}$ in 8) entsprungen sind, folglich $\mathrm{Arctg}\,o$ in beiden denselben Bogen $= n\pi$ $(n = o, 1, 2, 3, \ldots)$ ausdrückt, da hingegen im zweiten Glied $2r^3\,\mathrm{Arctg}\,o$ der Bogen ein anderer, $= m\pi$ $(m = o, 1, 2, \ldots)$ sein kann. Weil nun aber für $\alpha = o$ auch $K = o$ und für $r\,\mathrm{Cos}\,\alpha = a$ und $r\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \varrho$; $K = \frac{\pi}{3}[2r^3 - 3ar^2 + a^3]$ ist, so findet man aus diesen beiden Bedingungen $m = o$ und $n = 1$,

und hat also, wenn die Normale MN aus M auf G'C' durch q ausgedrückt wird, weil dann $a\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \varrho\,\mathrm{Sin}\,\alpha = q$ ist,

$$K = \frac{\pi}{3}\left[q[3r^2 - q^2] - a[3r^2 - a^2]\right],$$

woraus auch, für $a = o$; $K = \frac{\pi}{3} q\,[3r^2 - q^2]$ folgt.

4. Ist $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ und $BG = GC$, d. h. wenn EB durch ϱ ausgedrückt wird, $\varrho - b = \sqrt{r^2 - b^2} - a$, woraus $a = b$ folgt, so entsteht

$$K = \tfrac{2}{3}\left[b^2 h - b\,[3r^2 - b^2]\,\mathrm{Arctg}\,\frac{h}{b} + r^3\,\mathrm{Arctg}\,\frac{hr}{b^2}\right],$$

oder, blos durch b und ϱ ausgedrückt,

$$K = \tfrac{2}{3}\left\{b^2\sqrt{\varrho^2 - b^2} - b\,[2b^2 + 3\varrho^2]\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{b}{\varrho} + [b^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}.\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{b^2}{\varrho^2}\right].$$

Als Anwendung dieser Formel denke man sich zwei concentrische Halbkugeln den Halbmessern A und B zugehörig, und über den 4 Seiten (Fig. 20.) des im innern Kreis beschriebenen Quadrats, normale Wände auf die Ebene beider Grundkreise; so ist der Theil der hohlen Halbkugel, welcher zwischen den normalen vier Wänden sich befindet = der hohlen Halbkugel — dem Körper über der Ebene, welche von den Verlängerungen GB und PQ und den Kreisbogen GP und BQ eingeschlossen ist. Es ist aber die hohle Halbkugel $= \frac{2}{3}\pi(A^3 - B^3)$; und der erwähnte Körper = dem halben Kugelabschnitt über den Kreisabschnitt rechts der Sehne QC — dem halben Kugelabschnitt über dem Kreisabschnitt rechts der Sehne PG — dem Theil der größeren Halbkugel, welcher über der Ebene BGC steht, und dieser letztere Subtrahend ist die Hälfte des oben berechneten Körpers K, wenn $\sqrt{A^2 - \frac{1}{2}B^2}$ für ϱ und $B\sqrt{\frac{1}{2}}$ für b gesetzt wird. Drückt man alles durch A und B aus, so erhält man den verlangten körperlichen Inhalt =

$$\frac{\pi}{3}.\left[3B(A^2 - B^2)\sqrt{2} - 2(A^3 - B^3)\right] + \tfrac{1}{3}\left[2B^2\sqrt{A^2 - B^2} + 4A^3\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{B^2}{2A^2 - B^2} - B(6A^2 - B^2)\sqrt{2}.\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{B}{\sqrt{2A^2 - B^2}}\right].$$

Wird dieser Inhalt unter der Voraussetzung gefordert, daß die Begrenzung durch die Richtung der Fugen nach dem Mittelpunct M bestimmt sei, so ist der von $\frac{2}{3}\pi(A^3-B^3)$ zu subtrahirende Körper = der vierfachen Differenz zweier halben Kugelausschnitte, den Halbmessern A und B und den Höhen $A(1-\sqrt{\frac{1}{2}})$ und $B(1-\sqrt{\frac{1}{2}})$ zugehörig und man erhält die einfachere Formel

$$\frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}-1)[A^3-B^3] .$$

Aufgabe XXIII.

Ein, durch Umdrehung eines durch eine normale Achsenordinate abgeschnittenen paraboliſchen Segments ABD, (Fig. 21.) um ſeine Achſe AB erzeugtes Paraboloid ACBD von gleichförmiger Materie, deren ſpecifiſches Gewicht β kleiner wie 1 iſt, wird mit lothrechter Achſe AB ins Waſſer geſenkt, ſo daß der Scheitelpunct A die höchſte Stelle des Körpers einnimmt; man ſoll beurtheilen, ob dieſer ſchwimmende Körper in dieſer Lage Stabilität hat.

Auflöſung. Iſt $AB = a$; $BC = BD = b$; der Achſenparameter $= p$; alſo $b^2 = pa$ und man denkt ſich den ſchwimmenden Körper in einer veränderten Lage, in welcher die Achſe mit der Verticale den Winkel α bildet, und EG den Waſſerſpiegel bezeichnet, ſo hat man, AF durch h ausgedrückt,

1) $(FG.\mathrm{Cos}\,\alpha)^2 = p.[h - FG.\mathrm{Sin}\,\alpha]$; und hieraus

$$FG = \frac{-p\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \sqrt{p^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + 4ph\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}}{2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}.$$

2) $(EF\,\mathrm{Cos}\,\alpha)^2 = p[h + EF\,\mathrm{Sin}\,\alpha]$; und hieraus

$$FF = \frac{p\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \sqrt{p^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + 4ph\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}}{2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}.$$

3) Aus beiden Reſultaten folgt dann

$$EG = \frac{\sqrt{p^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + 4ph\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}}{\mathrm{Cos}\,\alpha^2} \text{ und}$$

$$EH = HG = \frac{\sqrt{p^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + 4ph\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}}{2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2},$$

so wie $HF = EF - EH$, oder $HF = \frac{p \operatorname{Sin} \alpha}{2 \operatorname{Cos} \alpha^2}$; dann auch die Ordinate IR auf die Achse, wenn KHI $\parallel$ BA gedacht wird $= HF \operatorname{Cos} \alpha$; oder

4) $IR = \frac{p}{2} \operatorname{tg} \alpha$ und die zugehörige Achsen-Abscisse

$AR = \frac{p}{4} \operatorname{tg} \alpha^2$; aus $FR^2 = p . AR$; endlich auch

$HI = HF \operatorname{Sin} \alpha + FA - AR$ oder

5) $HI = h + \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \alpha^2$.

Legt man nun durch einen beliebigen Punct S in EG eine Ebene, normal durch AB bis zur Begrenzung des Paraboloids, und betrachtet T als ihren Durchschnittspunct mit AB, setzt den Halbmesser dieser Kreisebene $= r$ und die durch S gehende, dieser Kreisebene und der Ebene, welche der Wasserspiegel im Körper abschneidet, gemeinschaftliche normale Ordinate $= q$, so hat man

$$r^2 = p . (h - FS \operatorname{Sin} \alpha), \text{ und auch}$$
$$r^2 = q^2 + (FS \operatorname{Cos} \alpha)^2; \text{ also}$$

6) $q^2 + FS^2 . \operatorname{Cos} \alpha^2 = ph - p . FS \operatorname{Sin} \alpha$, aus welcher Gleichung zwischen der Abscisse FS und der Ordinate q erhellet, daß die Ebene EG eine Ellipse ist.

Bezeichnet nun 2o die durch H gehende kleine Achse dieser Ellipse, so hat man für die Ordinate zum Punct F, welche $= \sqrt{p . h}$ ist,

$$ph = \frac{o^2}{GH^2} . [GH^2 - HF^2]; \text{ und hieraus}$$

7) $o^2 = \frac{p^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + 4 ph \operatorname{Cos} \alpha^2}{4 \operatorname{Cos} \alpha^2}$; folglich

8) den Inhalt der elliptischen Durchschnitts-Ebene

$$= EH . o . \pi$$
$$= \pi . \frac{p^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + 4 ph \operatorname{Cos} \alpha^2}{4 \operatorname{Cos} \alpha^3},$$

und dann den Inhalt des aus dem Wasser hervorragenden Theils des Körpers

$$= \Sigma \left[EH . o \pi . d \left(IH \operatorname{Cos} \alpha \right) \right]$$

$$= \text{Cos}\alpha \int_{\text{IH} \div 0} \pi \cdot \frac{p^2 \text{Sin}\alpha^2 + 4ph\text{Cos}\alpha^2}{4\text{Cos}\alpha^3} \, d(\text{IH}) \; ;$$

oder, nach 5) dh für dHI gesetzt, dieser Inhalt w

$$= \frac{\pi}{4\text{Cos}\alpha^2} \int_{h \div (-\frac{1}{4} p \, \text{tg}\alpha^2)} (p^2 \text{Sin}\alpha^2 + 4ph\text{Cos}\alpha^2) \, dh \; ; \text{ oder}$$

$$9) \; w = \frac{\pi p (p\text{Sin}\alpha^2 + 4h\text{Cos}\alpha^2)^2}{32\text{Cos}\alpha^4} \; .$$

Bezeichnet nun e die Tiefe, zu welcher sich der Körper, so lange er mit lothrechter Achse schwamm, ins Wasser senkte, so ist, den Inhalt des verdrängten Wassers = v gesetzt,

$$10) \; v = \frac{b^2 \pi a}{2} \cdot \beta \; ;$$

also der hervorragende Theil des Körpers, oder

$$w = \frac{b^2 \pi a}{2} (1 - \beta) \; ; \text{ und auch}$$

$$= \frac{\pi p}{2} (a - e)^2 \; ;$$

und aus der Gleichsetzung beider Werthe folgt

$$11) \; a - e = a\sqrt{1 - \beta} \; ; \text{ also}$$

$$e = a(1 - \sqrt{1 - \beta}) \; .$$

Aus der Gleichstellung der Ausdrücke für w folgt nun auch noch

$$12) \; h = \frac{4a\text{Cos}\alpha^2 \sqrt{1 - \beta} - p\text{Sin}\alpha^2}{4\text{Cos}\alpha^2} \; .$$

Ist nun L, in IH, der Schwerpunct des Körpers EAG, so hat man, die Summe der Momente, in Beziehung auf I genommen,

$$= \text{Cos}\alpha \int [\text{EH} \cdot e \cdot \pi \cdot d(\text{IH})] \cdot \text{IH}$$

$$= \frac{\pi p}{16\text{Cos}\alpha^4} \cdot \int_{h \div (-\frac{1}{4} p \, \text{tg}\alpha^2)} [p\text{Sin}\alpha^2 + 4h\text{Cos}\alpha^2]^2 \cdot \partial h$$

$$= \frac{\pi p}{3 \cdot 64\text{Cos}\alpha^6} [p\text{Sin}\alpha^2 + 4h\text{Cos}\alpha^2]^3 \; ;$$

oder den Werth für h aus 12) substituirt,

$$= \frac{\pi p a^3}{3} (1 - \beta)^{\frac{3}{2}} \; ; \text{ folglich}$$

13) $IL = \frac{\frac{1}{3}\pi p a^3 (1-\beta)^{\frac{1}{2}}}{w}$

$= \frac{2}{3} a . \sqrt{1-\beta}$;

und dann $LK = BA - AR - IL$; oder

14) $LK = a - \frac{1}{4} p tg\alpha^2 - \frac{2}{3} a\sqrt{1-\beta}$.

Bezeichnet nun N in AB den Schwerpunct des ganzen Körpers, P den des verdrängten Waſſers bei der angenommenen ſchrägen Lage der Achſe, und iſt PQ normal auf CD, ſo hat man

15) $NB = \frac{a}{3}$ und

$w . LK + v . PQ = \frac{b^2 \pi a}{2} . NB$, ſo wie auch

$W . KB = V . BQ$.

Aus der erſten Gleichung erhält man

16) $PQ = \frac{12a\beta - 8a + (1-\beta)[3p tg\alpha^2 + 8a\sqrt{1-\beta}]}{12\beta}$,

und aus der zweiten

17) $BQ = \frac{(1-\beta) p tg\alpha}{2\beta}$.

Wird nun PM lothrecht gedacht, ſo iſt der Durchſchnittspunct M mit der Achſe, das Metacentrum und

$BM = QP + BQ . Cotg\alpha$ oder:

18) $BM = \frac{12a\beta - 8a + (1-\beta)[6p + 3p tg\alpha^2 + 8a\sqrt{1-\beta}]}{12\beta}$,

und folglich $NM = BM - \frac{a}{3}$; oder

19) $NM = \frac{1-\beta}{12\beta} . [6p - 8a[1-\sqrt{1-\beta}] + 3p tg\alpha^2]$;

und es findet daher nur dann Stabilität ſtatt, wenn dieſer Ausdruck, auch für einen unendlich kleinen Werth von α ſogleich poſitiv wird. Dieß erfolgt aber, für

$6p \geqq 8a(1-\sqrt{1-\beta})$,

woraus, nach 11), entweder

20) $\alpha \leqq \frac{1}{2} p$ oder:

21) $\beta \leqq \frac{8a^3 - 3b^3}{16a^4} . 3b^2$ entſpringt. Für $b = a$ ergiebt ſich hieraus

22) $\beta \leqq \frac{11}{16}$.

Aufgabe XXIV.

Eine verticale Wand begrenzt stillstehendes Wasser; es soll der Normaldruck des Wassers, und der Mittelpunct desselben, auf einen von einer Curve mitbegrenzten Theil dieser Wand bestimmt werden.

In der verticalen Wand sei eine Verticale die Achse X, der Abscissen x, der Anfangspunct im Wasserspiegel, die Ordinaten y horizontal, also normal auf X, y_x sei gegeben, und der Theil der Wand, auf welchen der Normaldruck D des Wassers bestimmt werden soll, sei begrenzt von den parallelen y_a, y_o, von $a-o$ und dem Bogen, welcher die Endpuncte von y_a und y_o verbindet; x_o, y_o bezeichnen die Coordinaten des gesuchten Mittelpuncts des Wasserdrucks und γ das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers (Fig. 22.), so ist der Druck auf das Element ydx, nach den Gesetzen der Hydrostatik $= ydx.x.\gamma$ folglich

$$D = \gamma \Sigma_{a-dx}[(yx).dx]; \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad D = \gamma \int_{a \div o} yx\,dx.$$

Es ist ferner, in Beziehung auf den Wasserspiegel als Momenten-Achse, für das Element ydx das Moment des Wasserdrucks $= x.\gamma yx\,dx$, folglich

$$D.x_o = \gamma \Sigma_{a-dx}[(yx^2).dx] \text{ oder}$$

II. $D.x_0 = \gamma \int_{a \div c} yx^2\,dx$; und in Beziehung auf X als Momentenachse

$$D.y_0 = \gamma \Sigma [(\tfrac{1}{2}y.xy)\,dx]; \text{ folglich}$$

III. $D.y_0 = \tfrac{1}{2}\gamma \int_{a \div c} y^2 x.dx$.

Beispiele. 1. Für ein bis in den Wasserspiegel reichendes rechtwinkliches Parallelogramm mit horizontalen und vertikalen Seiten, b und h. (Fig. 22. A.)

Hier ist $y = b$ constant; $a = h$; $c = o$, und es entsteht

$$D = \tfrac{1}{2}bh^2\gamma; \quad x_0 = \tfrac{2}{3}h; \quad y_0 = \tfrac{1}{2}b.$$

2. Für ein rechtwinkliches Dreieck mit horizontaler und lothrechter Cathete b, h, dessen b gegenüberliegende Ecke im Wasserspiegel liegt. (Fig. 22. B.)

Hier ist $y_x = \frac{bx}{h}$; $a = h$; $c = o$; und man erhält

$$D = \tfrac{1}{3}bh^2\gamma; \quad x_0 = \tfrac{3}{4}h; \quad y_0 = \tfrac{3}{8}b.$$

3. Für dasselbe rechtwinkliche Dreieck, wenn die eine Cathete b im Wasserspiegel liegt. (Fig. 22. C.)

In diesem Falle ist $y_x = \frac{b(h-x)}{h}$; $a = h$; $c = o$ und man erhält:

$$D = \tfrac{1}{6}bh^2\gamma; \quad x_0 = \tfrac{1}{4}h; \quad y_0 = \tfrac{1}{4}b.$$

4. Für eine Parabel, deren Scheitel im Wasserspiegel liegt, deren Achse h lothrecht, und deren letzte Ordinate b horizontal ist. (Fig. 22. D.)

Hier ist $y_x = b\sqrt{\frac{x}{h}}$; $a = h$; $c = o$; und man findet:

$$D = \tfrac{2}{5}bh^2\gamma; \quad x_0 = \tfrac{4}{7}h; \quad y_0 = \tfrac{5}{12}b.$$

5. Für dieselbe Parabel, nur b im Wasserspiegel liegend. (Fig. 22. E.)

Hier ist $y_x = b\sqrt{\frac{h-x}{h}}$; $a = h$; $c = o$; und es ergiebt sich

$$D = \tfrac{4}{15} bh^2 \gamma ; \quad x_0 = \tfrac{4}{7} h ; \quad y_0 = \tfrac{4}{15} . b .$$

6. Für einen Halbkreis zum lothrechten Durchmesser h, den einen Endpunct desselben, im Wasserspiegel liegend. (Fig. 22. F.)

Hier ist $y_x = \sqrt{hx - x^2}$; $a = h$; $c = o$; und es entsteht:

$$D = \frac{\pi}{16} h^3 \gamma = \frac{\pi}{8} . \frac{h}{2} h^2 . \gamma ; \quad x_0 = \frac{5}{8} h ; \quad y_0 = \frac{4}{3\pi} . \frac{h}{2} .$$

Aufgabe XXV.

Die Höhe eines Berges durch den Barometerstand (ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit des Wärmegrades) zu bestimmen.

Ist der Barometerstand am Fuß der Höhe $= p$, im Scheitel derselben $= y$; die Höhe selbst $= x$, und senkt sich das Queckſilber am Meere, wo der mittlere Stand desſelben 28 Zoll ist, um a Zolle, wenn man sich daselbst zur kleinen Höhe h erhebt, so wird in der Höhe $x+dx$ der Barometerstand durch $y+dy$, also zur Erhebung dx die Senkung des Queckſilbers durch $y-(y+dy)$ d. h. durch $-dy$ ausgedrückt sein, wobei, wenn dx unendlich klein gedacht wird, die Dichtigkeit der Luftschicht als unveränderlich anzusehen ist. Da sich nun, nach Mariotte's durch alle bisherigen Erfahrungen bestätigtem Gesetz bei einerlei Temperatur, die Dichtigkeiten der Luft in verschiedenen Höhen, wie die zugehörigen Barometerstände, die Senkungen des Queckſilbers aber wie diese Dichtigkeiten und zugleich auch wie die Erhebungshöhen verhalten so hat man

$$a : -dy = \left\{\begin{matrix} 28 : y \\ h : x \end{matrix}\right\}, \text{ also}$$

$$dy = -\frac{ay}{28h}.dx; \text{ und hieraus}$$

$$\frac{\partial y_x}{y} = -\frac{a}{28h}; \text{ folglich}$$

$$\ln y \quad -\frac{a}{28h}x + \text{Const.}$$

Für $x = o$ ist $y = p$; daher Const $= \ln p$; und demnach

$$\ln \frac{p}{y} = \frac{a}{28h} . x \text{ ; also}$$

$$x = \frac{28h}{a} \ln \frac{p}{y} .$$

Nach genauen Beobachtungen ist $a = 0,08$ Zoll zu $h = 8,755$ Fuß; also $x = 24500 . \ln \frac{p}{y}$ Fuße, oder auch, weil

$\ln z = 2,302585 . \log br z$ ist,

$x = 56500 \log br \frac{p}{y}$ Fuße.

Aufgabe XXVI.

In einer verticalen Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes sei ein bis in den Wasserspiegel reichendes Oblong von den Abmessungen b, h gegeben; b horizontal, h lothrecht gedacht; in derselben Ebene die Curve zu bestimmen, für welche jeder horizontale Streifen, zwischen ihr und h, bei derselben Höhe (auf h) auch gleich stark vom Wasser gedrückt wird, der gesammte Wasserdruck aber, auf den ganzen Raum, begrenzt von der Curve, h, und den Horizontalen aus den Endpuncten von h, eben so groß ist, wie der auf das Oblong vom Inhalt bh.

Nimmt man die Abscissen x auf h, vom Wasserspiegel herab, die Ordinaten y der Curve, normal darauf, so ist der Druck des Wassers auf den Streifen $y\,dx$, wenn γ das Gewicht der cubischen Einheit Wasser ausdrückt, $= xy_x dx.\gamma$, und dieser Ausdruck soll constant werden, und zwar gleich dem eben so vielten Theil des Wasserdrucks auf das Rechteck, als der Quotient $\frac{h}{dx}$ angiebt. Es ist aber der Druck des Wassers auf das Rechteck $= bh.\frac{h}{2}.\gamma$ und man hat daher die Gleichung $xy\,dx\gamma = \frac{bh^2\gamma}{2} : \frac{h}{dx}$ und hieraus $xy = \frac{bh}{2}$, woraus erhellet, daß die gesuchte Curve eine Hyperbel ist, deren Asymptoten h und b (b im Wasserspiegel) sind. Der Scheitelpunct dieser Hyperbel liegt in der Linie, welche den Winkel beider Asymptoten halbirt, in der Entfernung $\sqrt{bh}$ von der Spitze desselben.

Aufgabe XXVII.

In irgend einem Punct A (Fig. 23.) einer Curve, welche in einer Vertical-Ebene liegt, wird ein Atom vom Gewicht Q nach der Richtung der Tangente mit der Geschwindigkeit o, steigend in Bewegung gesetzt. Wenn nun die Curve von der Form gedacht wird, daß der Atom durch sein Gewicht gezwungen bleibt, der Bahn der Curve zu folgen, so soll bestimmt werden 1stens, welche Geschwindigkeit u der Atom in jedem Punct der Bahn besitzt; 2tens wie stark derselbe in jedem Augenblick die Bahn normal drückt; (welcher Druck die Centrifugalkraft heißt), 3tens welche Zeit t zur Durchlaufung des Bogens s verwendet wird.

Wird die lothrechte durch A als Achse der Abscissen x gewählt, A als Anfangspunct, die Ordinaten y horizontal genommen; bezeichnet, zu x und y gehörig, s die Länge des Bogens, t die Zeit in der s durchlaufen wird, u die Endgeschwindigkeit, P die der Centrifugalkraft gleiche Gegenwirkung der festen Bahn, und z den Winkel, welchen die Tangente im Endpunct von s mit x bildet, so sind die 3 Gleichungen

1) $\partial s_t = u$

2) $\partial^2 x_t = 2g \dfrac{P \operatorname{Sin} z - Q}{Q}$

3) $\partial^2 y_t = -2g \dfrac{P \operatorname{Cos} z}{Q}$.

Setzt man in 2) und 3) $\partial y_s = \dfrac{\partial y_t}{\partial s_t}$ für Sin z; $\partial x_s = \dfrac{\partial x_t}{\partial s_t}$ für Cos z und bezeichnet $2g\dfrac{P}{Q}$ durch G, so folgt

4) $\partial^2 x_t = -2g + G\dfrac{\partial y_t}{\partial s_t}$; und

5) $\partial^2 y_t = -G\frac{\partial x_t}{\partial s_t}$; also, wenn aus beiden Gleichungen G eliminirt wird,

6) $\partial x_t . \partial^2 x_t = -2g\partial x_t - \partial y_t . \partial^2 y_t$, und hieraus, wenn man integrirt,

7) $\partial x_t^2 = -4gx - \partial y_t^2 + \text{Const.}$ oder, weil

8) $\partial x_t^2 + \partial y_t^2 = \partial s t^2 = u^2$ ist

9) $u^2 = -4gx + \text{Const.}$, daher, weil $u = c$ ist, für $x = o$;

I. $u^2 = c^2 - 4gx$, welche Gleichung dieselbe Geschwindigkeits-Abnahme ausdrückt, als wenn der Atom lothrecht den Weg x durchstiegen hätte.

Um nun auch die Kraft P oder G als Function von x auszudrücken, hat man aus 1)

10) $\partial s_x . \partial x_t = u$; also

11) $\partial t_x = \frac{\partial s_x}{u}$; ferner hieraus

12) $\partial^2 x_t \left(= -\frac{\partial^2 t_x}{\partial t_x^3}\right) = \frac{u\partial s_x . \partial u_x - u^2 \partial^2 s_x}{\partial s_x^3}$; und substituirt man diesen Werth in 4) und benutzt zugleich die Gleichungen $\partial s_x^2 = 1 + \partial y_x^2$, die hieraus folgende $\partial s_x \partial^2 s_x = \partial y_x . \partial^2 y_x$; und die aus I. entspringende $u\partial u_x = -2g$, so entsteht, wenn in 4) $\frac{\partial y_x}{\partial s_x}$ für $\frac{\partial y_t}{\partial s_t}$ geschrieben wird.

II. $G = 2g\frac{P}{Q} = 2g\frac{\partial y_x}{\partial s_x} - \frac{u^2 . \partial^2 y_x}{\partial s_x^3}$; welches Resultat auch aus 5) zu entnehmen ist, wenn man die Formel

$$\partial^2 y_t = \partial y_x . \partial^2 x_t + \partial^2 y_x . \partial x_t^2$$

in Anwendung bringt.

Aus 11) entspringt nun auch noch sogleich

III. $t = \int \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{\sqrt{c^2 - 4gx}} . dx$.

Beispiele. 1. Ist die Bahn eine gewöhnliche Cycloide, deren erzeugender Kreis den Halbmesser r hat, A ihr Scheitelpunct, X ihre Achse, also

$$y = \sqrt{2rx - x^2} + r\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{r-x}{r}, \text{ so entsteht}$$

I. $u^2 = c^2 - 4gx$;

II. $G = \frac{c^2 + 8g(r-x)}{2\sqrt{2r(2r-x)}}$;

III. $t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{c^2 - 8gx}{c^2}$.

Läßt man den Atom bis zum Stillstand steigen, so wird $x = \frac{c^2}{4g}$; und $t = \pi.\sqrt{\frac{r}{2g}}$; d. h. die Zeit des gänzlichen Steigens (also auch des Fallens) ist für jede Anfangs- (oder End-) Geschwindigkeit dieselbe, weshalb die Cycloide tautochronisch heißt.

2. Ist die Bahn ein Kreis zum Halbmesser r, dessen Mittelpunct in X liegt, so ist $y^2 = 2rx - x^2$, und man erhält

I. $u^2 = c^2 - 4gx$;

II. $G = 2g + \frac{c^2 - 6gx}{r}$;

III. $t = r\int \frac{dx}{\sqrt{(2r-x)\,x\,(c^2 - 4gx)}}$.

Weil nun III. nur durch Reihen integrabel ist, so kann man, wenn x nur klein, der Factor $2r - x$ also wenig veränderlich ist, etwa der Elongations-Winkel nicht über 15° beträgt, für diesen Factor seinen Mittelwerth

$$\frac{2r + 2r - (r - r\,\mathrm{Cos}\,15°)}{2} = r.\frac{3 + \mathrm{Cos}\,15°}{2} = a \text{ setzen,}$$

und hat dann annähernd

$$t = \frac{r}{2\sqrt{ag}}\,\mathrm{Arc\,Sin}\frac{8gx - c^2}{c^2} + \mathrm{Const.}; \text{ also}$$

$$t = \frac{r}{2\sqrt{ag}}\,\mathrm{Arc\,Cos}\frac{c^2 - 8gx}{c^2};$$

folglich die Zeit des gänzlichen Steigens $= \frac{r}{2\sqrt{ag}}\pi$ und demnach beim einfachen Pendel die Zeit T einer Oscillation $= \frac{r}{\sqrt{ag}}\pi$; oder, da a nahe $= 2r$ zu setzen ist,

$$T = \pi . \sqrt{\frac{r}{2g}} .$$

3. Wird das Gewicht des Atoms als aufgehoben angesehen, (wie in dem Falle, wenn die Curve in einer horizontalen festen Ebene liegt, so fällt in der zweiten Gleichung der Subtrahend Q weg, und man erhält, wenn R den Halbmesser der Krümmung im Endpunct von s bezeichnet

I. $u^2 = c^2$.

II. $G = \frac{c^2}{R}$.

III. $t = \frac{s}{c}$.

Aufgabe. XXVIII.

Aus einer bedeutenden Höhe in der Entfernung a, vom Mittelpunct unſerer Erde, wird ein ſchwerer Körper, frei, (d. h. ohne anfängliche Geſchwindigkeit und ohne Rückſicht auf den Widerſtand der Luft) der Einwirkung der Schwere überlaſſen; es ſollen die Fallzeit t, die Fallhöhe s und die Endgeſchwindigkeit c mit Rückſicht auf das hypothetiſche, beſtätigte Geſetz: daß ſich die anziehende Kraft unſerer Erde umgekehrt nach dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunct derſelben, beſtimmt, unter einander verglichen werden.

Bezeichnet r den mittleren Halbmeſſer unſerer Erde, ſo iſt die Beſchleunigung G im Endpunct von $s = \frac{r^2}{(a-s)^2} \cdot g$; folglich

1) $\partial s_t = c$ und

2) $\partial c_t = 2g\frac{r^2}{(a-s)^2}$; alſo

3) $c\partial c_t = \frac{2gr^2}{(a-s)^2} \cdot \partial s_t$; daher, wenn man integrirt

4) $c^2 = \frac{4gr^2}{a-s} + \text{Const.}$

Weil nun s und c zugleich verſchwinden, ſo wird

$$\text{Const} = -\frac{4gr^2}{a};$$

und folglich

I. $c = 2\sqrt{g}.\sqrt{\frac{r^2}{a(a-s)}}.s$.

Aus 1) ist nun aber $\partial t_s = \frac{1}{c}$; also

5) $\partial t_s = \frac{\sqrt{a}}{2r\sqrt{g}}\sqrt{\frac{a-s}{s}}$ und, wenn man integrirt,

und die Const. aus der Bedingung entnimmt, daß t und s zugleich verschwinden,

II. $t = \frac{\sqrt{a}}{2r\sqrt{g}}\left[\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\operatorname{Arc\,Cos}\frac{a-2s}{a}\right]$.

Beispiel. Ist $s = a-r$, fällt also der Körper bis zur Erdoberfläche, so entsteht

1) $c = 2\sqrt{g}.\sqrt{\frac{r}{r+s}}.s$; ferner, wenn

$$\operatorname{Arc\,Cos}\frac{a-2s}{a} = \alpha$$

gesetzt wird, so daß also

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{a-2s}{a} = \frac{r-s}{r+s};$$

folglich nach der Formel

$$\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}\alpha}{2}}; \text{ nun}$$

$$\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s}{r+s}}; \text{ also}$$

$$\alpha = 2\operatorname{Arc\,Sin}\sqrt{\frac{s}{r+s}} \text{ ist;}$$

2) $t = \frac{\sqrt{a}}{2r\sqrt{g}}\left[\sqrt{rs} + a\operatorname{Arc\,Sin}\sqrt{\frac{s}{r+s}}\right]$.

Ist nun die Fallhöhe s sehr klein in Vergleich mit r, so ist $\frac{r}{r+s} = 1$, also $a = r$ und da dann $\sqrt{\frac{s}{r+s}}$ ein sehr kleiner Si-

nus ist, dieser Sinus selbst für den Bogen zu setzen, und man erhält unter diesen Voraussetzungen, die gewöhnlichen Formeln für den freien Fall, nehmlich

$$c = 2\sqrt{gs} \text{ und}$$

$$t = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Aufgabe XXIX.

Es sind 2 Puncte A und B (Fig. 24.) in einer Verticals-Ebene gegeben; zwischen beiden diejenige Curve zu ermitteln, in welcher ein schwerer Punct in der kürzesten Zeit von A bis B fällt.

Ist der verticale Abstand beider Puncte, $AD = a$; ihr horizontaler $DB = b$; jede Abscisse von A aus auf AD zwischen den Grenzen a und o gleich x; die zugehörige normale Ordinate der gesuchten Curve $= y$ und der entsprechende Bogen $AC = v$; t die Zeit, in welcher der schwere Punct aus Ruhe, von A bis C fällt, c die in C also in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwere, und α der Winkel der Tangente in C mit der Verticale, so ist die Beschleunigung in C

$$= g \operatorname{Cos} \alpha = g \partial x_v ;$$

folglich nach den Gesetzen der Mechanik

1) $\partial c_t = 2g \partial x_v$

2) $c = \partial v_t$ und aus beiden Gleichungen

3) $c \partial c_t = 2g \partial x_t$; woraus

4) $c^2 = 4gx$, ohne Constante, entspringt.

Man hat daher aus 2) und 4)

5) $\partial v_t = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$ und hieraus

6) $\partial t_v = \frac{1}{2\sqrt{g}\sqrt{x}}$; folglich, weil $\partial t_v = \partial t_x \cdot \partial x_v$ ist

7) $\partial t_x = \frac{\partial v_x}{2\sqrt{g} \cdot \sqrt{x}}$, also, da $\partial v_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}$ ist,

8) $t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{\sqrt{x}} \cdot dx.$

Bezeichnet nun

9) u die Function $\frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{\sqrt{x}}$ und

10) p die Ableitung ∂y_x, so ist nach der Variationsrechnung die Bedingungsgleichung des Kleinsten

11) $\partial u_y - \partial^2 u_{p,x} = o$. Es ist aber aus 9) $\partial u_y = o$ und $\partial u_p = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ oder $\partial u_p = \frac{\partial y_x}{\sqrt{x} \cdot \partial v_x}$; und folglich wird aus 11)

12) $\partial \left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{x} \cdot \partial v_x}\right]_x = o$; woraus

13) $\frac{\partial y_x}{\sqrt{x} \cdot \partial v_x} = \text{Const}$ oder

14) $\partial y_x = \text{Const} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2}$; also Const durch $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ ausgedrückt,

15) $\partial y_x = \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$; und dann abermals integrirt

16) $y = -\sqrt{2rx - x^2} + 2r \operatorname{Arc Sin} \sqrt{\frac{x}{2r}} + \text{Const}$, oder

$$y = -\sqrt{2rx - x^2} + r \operatorname{Arc Cos} \frac{r-x}{r} + A$$

entsteht, welche Gleichung der Cycloide angehört.

Zur Bestimmung der beiden Constanten, r und A liefert die Aufgabe folgende 2 Gleichungen

17) $o = -o + r \operatorname{Arc Cos} 1 + A$ und

18) $b = -\sqrt{2ra - a^2} + r \operatorname{Arc Cos} \frac{r-a}{r} + A$; und da der ersten dieser Gleichungen $A = o$ genügt, so hat man also

19) $y = -\sqrt{2rx - x^2} + r \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-x}{r}$, worinnen r den aus der Gleichung

20) $b = -\sqrt{2ra - a^2} + r \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-a}{r}$ zu entnehmenden Werth haben muß.

Die Zeit T des Fallens von A bis B auf dieser Cycloide, also das Minimum, ergiebt sich dann aus 8), nehmlich

$$T = \frac{\sqrt{2r}}{2\sqrt{g}} \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-a}{r} \text{ oder auch}$$

$$T = \frac{b + \sqrt{2ra - a^2}}{\sqrt{2rg}}.$$

Aufgabe XXX.

In einer verticalen Wand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes befinde sich eine, von einer gegebenen Curve mitbegrenzte Oeffnung, aus welcher das Wasser, bei unveränderlich erhaltenem Wasserspiegel, ausfließt. Die in jeder Secunde abfließende Wassermenge M zu bestimmen.

In der verticalen Wand sei eine Verticale die Achse X der Abcissen x, der Anfangspunct im Wasserspiegel, die Ordinaten y normal; y_x sei gegeben und die Oeffnung sei begrenzt von den Parallelen y_a, y_o; von $a - o$ und dem Bogen, welcher die Endpuncte von y_o und y_a verbindet, so ist im Element $y \cdot dx$, die hypothetische Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers $= 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$, folglich wenn α den Contractions-Coefficienten bezeichnet, die wirkliche Geschwindigkeit $= \alpha \cdot \sqrt{x}$; und daher $\alpha \cdot \sqrt{x} \cdot ydx$ die aus ydx in jeder Secunde abfließende Wassermenge. Man hat daher

$$M = \alpha \Sigma_{a-dx}^{a} [(y_x \sqrt{x}) \cdot dx]; \text{ oder}$$

$$M = \alpha \int_{a \div o} y_x \cdot \sqrt{x} \cdot dx.$$

Beispiele. 1. Für ein bis in den Wasserspiegel reichendes Oblong mit horizontalen und verticalen Seiten b, h. (Fig. 22. A.)

Hier ist $y = \text{Const} = b$; $a = h$; $o = o$; und man findet

$$M = \tfrac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}.$$

2. Für ein rechtwinkliches Dreieck mit horizontaler und lothrechter Cathete b, h dessen, b gegenüberliegende Ecke im Wasserspiegel liegt. (Fig. 22. B.)

Hier ist $y_x = \frac{bx}{h}$; $a = h$; $c = o$; und es entsteht

$$M = \tfrac{2}{5} a\, bh \sqrt{h}.$$

3. Für dasselbe Dreieck, wenn b im Wasserspiegel liegt. (Fig. 22. C.)

Hier ist $y_x = \frac{b(h-x)}{h}$; $a = h$; $c = o$; und man erhält

$$M = \tfrac{4}{15} a\, bh \sqrt{h}.$$

4. Für eine parabolische Oeffnung, deren Scheitel im Wasserspiegel liegt, deren Achse h lothrecht, und deren letzte Ordinate b horizontal ist. (Fig. 22. D.)

Hier ist $y_x = b \sqrt{\frac{x}{h}}$; $a = h$; $c = o$; und es ergiebt sich

$$M = \tfrac{2}{5} a\, bh \sqrt{h}.$$

5. Für dieselbe Parabel, nur b im Wasserspiegel liegend. (Fig. 22. E.)

Hier ist $y_x = b \sqrt{\frac{h-x}{h}}$; $a = h$; $c = o$ und man findet

$$M = \frac{\pi}{8} a\, bh \sqrt{h}.$$

6. Für einen Halbkreis zum lothrechten Durchmesser h, den einen Endpunct desselben im Wasserspiegel liegend. (Fig. 22. F.)

Hier ist $y_x = \sqrt{hx - x^2}$; $a = h$; $c = o$; und es entsteht

$$M = \frac{8}{15} \cdot a \cdot \frac{h}{2} \cdot h \sqrt{h}.$$

Aufgabe XXXI.

Die Zeit T zu bestimmen, während welcher aus einem Gefäß von der Höhe h, welches mit Wasser gefüllt ist, dieses durch eine Oeffnung $a^2 =$ im horizontalen Boden abfließt, wenn kein Wasserzufluß statt findet. (Fig. 25.)

Senkt sich der Wasserspiegel in der Zeit t zur Tiefe x und bezeichnet y^2 den horizontalen Querschnitt des Gefäßes im Endpunct von x, also den Inhalt des Wasserspiegels im letzten Augenblick der Zeit t, so ist die in der Zeit dt abfließende Wassermenge sowohl durch $\alpha a^2 \sqrt{h-x}.dt$ (unter α den Contractions-Coefficienten verstanden) als auch, durch $y^2.dx$ auszudrücken und folglich

$$\alpha a^2 \sqrt{h-x}.dt = y^2\,dx, \text{ woraus}$$

$$dt_x = \frac{y^2}{\alpha a^2 . \sqrt{h-x}}; \text{ also}$$

$$t = \int \frac{y^2\,dx}{\alpha a^2 \sqrt{h-x}} \text{ und folglich}$$

$$T = \frac{1}{\alpha a^2} \int_{h=o} \frac{y^2}{\sqrt{h-x}}.dx \text{ folgt.}$$

Beispiele. 1. Ist das Gefäß prismatisch vom horizontalen Querschnitt A^2; so ist $y^2 = A^2$ und es entsteht

$$T = 2.\frac{A^2}{\alpha a^2}.\sqrt{h}. \quad \text{(Fig. 25. A.)}$$

2. Bildet das Gefäß einen abgekürzten Kegel (oder auch Pyramide) von den Grundebenen A^2 und a^2 und ist A^2 der ursprüngliche Wasserspiegel (Fig. 25. B.), so ist

$$y^2 = \left[A - \frac{A-a}{h}x\right]^2; \text{ und}$$

$$T = \frac{2}{15\alpha a^2}\left[3A^2 + 4aA + 8a^2\right].\sqrt{h};$$

und, wenn a^2 im Vergleich mit A^2 äußerst klein ist, nahe

$$T = \frac{2}{5}\cdot\frac{A^2}{\alpha a^2}\cdot\sqrt{h}.$$

3. Bildet das Gefäß denselben abgekürzten Kegel, aber in umgekehrter Lage (Fig. 25. C.), so ist

$$y^2 = \left[a + \frac{A-a}{h}x\right]^2; \text{ und}$$

$$T = \frac{2}{15\alpha a^2}\left[8A^2 + 4aA + 3a^2\right].\sqrt{h}$$

und, wenn a^2 in Vergleich mit A^2 äußerst klein ist, beinahe

$$T = \frac{16}{15}\cdot\frac{A^2}{\alpha a^2}\sqrt{h}.$$

4. Bildet das Gefäß ein Paraboloid, durch Umdrehung um die Achse erzeugt, von den parallelen Grundebenen A^2 und a^2 und ist A^2 der ursprüngliche Wässerspiegel (Fig. 25. D.), so ist

$$y^2 = A^2 - \frac{A^2-a^2}{h}x; \text{ und}$$

$$T = \frac{2}{3\alpha a^2}\left[A^2 + 2a^2\right]\sqrt{h}$$

und wenn $\frac{a}{A}$ sehr klein ist, nahe

$$T = \frac{2}{3}\cdot\frac{A^2}{\alpha a^2}\cdot\sqrt{h}.$$

5. Bildet das Gefäß dasselbe Paraboloid, jedoch in umgekehrter Lage (Fig. 25. E.), so ist

$$y^2 = a^2 + \frac{A^2-a^2}{h}x \text{ und}$$

$$T = \frac{2}{3\alpha a^2}\left[2A^2 + a^2\right]\sqrt{h},$$

also wenn $\frac{a}{A}$ sehr klein ist, nahe

$$T = \frac{4}{3}\cdot\frac{A^2}{\alpha a^2}\cdot\sqrt{h}.$$

6, Bildet das Gefäß eine körperliche Zone von den parallelen Grundebenen A^2 und a^2, ist A^2 ein größter Kreis und der ursprüngliche Wasserspiegel (Fig. 25. F.), so ist

$$h^2 = \frac{A^2 - a^2}{\pi}\ ;\quad y^2 = A^2 - x^2\pi\ ;\quad \text{und}$$

$$T = \frac{2}{15\alpha a^2}\left[7A^2 + 8a^2\right]\sqrt{h}\ ;$$

also, wenn $\frac{a}{A}$ sehr klein ist, beinahe

$$T = \frac{14}{15}\cdot\frac{A^2}{\alpha a^2}\cdot\sqrt{h}.$$

7. Bildet das Gefäß dieselbe Zone, aber in umgekehrter Lage (Fig. 25. G.), so ist

$$h^2 = \frac{A^2 - a^2}{\pi}\ ;\quad y^2 = A^2 - (h-x)^2\pi\ ;\quad \text{und}$$

$$T = \frac{2}{5\alpha a^2}\left[4A^2 + a^2\right]\sqrt{h},$$

und wenn $\frac{A}{a}$ sehr klein ist, nahe

$$T = \frac{8}{5}\cdot\frac{A^2}{\alpha a^2}\cdot\sqrt{h}.$$

Wenn also $\frac{a}{A}$ sehr klein ist, und in allen 7 Fällen a, A, h dieselben Werthe haben, so verhalten sich diese 7 nach der Reihefolge bestimmten Zeiten wie 15 : 3 : 8 : 5 : 10 : 7 : 12.

Aufgabe XXXII.

In einem Fluß bewege ſich das Waſſer parallel mit den parallelen Ufern, mit einer mittleren Geſchwindigkeit c; in der Mitte N (Fig. 26.) der Breite deſſelben ſei ein Tau von der Länge r befeſtigt, und an deſſen andern Endpunct mit einem ſchwimmenden Körper, deſſen Gewicht = Q iſt, ſo verbunden, daß derſelbe eine Ebene vom Inhalt a, dem Stoß des Waſſers, unter dem Winkel α mit der Richtung von c, ausſetzt. Die Zeit T zu beſtimmen, in welcher Q, bloß durch das bewegte Waſſer getrieben, von einem Ufer zum andern gelangt.

Durchläuft r (bei fliegenden Brücken das Giertau genannt) beim Uebergang von Q den Winkel 2β, ſo daß alſo die Breite des Fluſſes $= 2r\,\mathrm{Sin}\,\beta$ iſt, bezeichnet b die Höhe des Bogens $2r\beta$, alſo den Ausdruck $r - r\,\mathrm{Cos}\,\beta$ und legt Q in den erſten t Secunden den Winkel x, alſo den Bogen rx zurück, und beſitzt im letzten Augenblick dieſer Zeit t die tangentiale Geſchwindigkeit u, ſo iſt, wenn M die in jeder Secunde zum Stoß gelangende Waſſermenge ausdrückt

1) $M = ac\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; alſo ohne Rückſicht auf die geringe Geſchwindigkeit, mit welcher, wenn r groß iſt, Q nach der Richtung von c ausweicht, der Stoß des Waſſers auf die Projection von a, normal auf c, oder

2) $P = \frac{c}{4g} M\gamma$;

folglich der Parallelſtoß, oder

3) $P' = \frac{c}{4g} My . \mathrm{Sin}\,\alpha^2$; also aus 1) substituirt

4) $P' = \frac{ac^2\gamma}{4g} \mathrm{Sin}\,\alpha^3$; und folglich, wenn vorausgesetzt wird, daß, weil das Wasser auf der Seite des Stoßes etwas höher stehen wird, als auf der Gegenseite von a, der dadurch entstehende größere hydrostatische Druck diesseits, mit den Hindernissen gegen die Bewegung von Q im Gleichgewicht sei, die Ueberwucht nach der Richtung von u, oder

5) $P'' = P' \mathrm{Sin}\,(\beta - x) = \frac{ac^2\gamma \mathrm{Sin}\,\alpha^3}{4g} \mathrm{Sin}\,(\beta - x)$.

Hiernach ist dann die Beschleunigung G nach der Richtung von u während der unendlich kleinen Zeit $dt = g\frac{P''}{Q}$; oder

6) $G = \frac{ac^2\gamma \mathrm{Sin}\,\alpha^3}{4Q} \mathrm{Sin}\,(\beta - x)$; und folglich

7) $\partial(rx)_t = u$; und

8) $\partial u_t = 2G = \frac{ac^2\gamma \mathrm{Sin}\,\alpha^3}{2Q} \mathrm{Sin}\,(\beta - x)$.

Bezeichnet nun A den Ausdruck $\frac{ac^2\gamma \mathrm{Sin}\,\alpha^3}{Q}$; so giebt das Product von 7) und 8) folgende Gleichung:

9) $u\partial u_t = \frac{rA}{2} \mathrm{Sin}\,(\beta - x) . \partial x_t$; oder

10) $2u\partial u_x = rA \mathrm{Sin}\,(\beta - x)$; woraus

11) $u^2 = rA \mathrm{Cos}\,(\beta - x) + \mathrm{Const}$
$= rA\,[\mathrm{Cos}\,(\beta - x) - \mathrm{Cos}\,\beta]$;

also, wenn $r - r\,\mathrm{Cos}\,(\beta - x)$ durch y ausgedrückt wird,

12) $u^2 = A(b - y)$ entspringt.

Aus 7) hat man daher nun

13) $r\partial x_t = \sqrt{A} . \sqrt{b - y}$; oder, weil

$\partial y_t = -r \mathrm{Sin}\,(\beta - x)\,\partial x_t = -\sqrt{2ry - y^2} . \partial x_t$ also

14) $\partial x_t = -\frac{\partial y_t}{\sqrt{2ry-y^2}}$ ist, wenn man diesen Werth in 13) setzt, $\frac{1}{\partial t_y}$ für ∂y_t schreibt, und ∂t_y entwickelt,

15) $\partial t_y = -\frac{r}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2r-y)y(b-y)}}$, also annähernd, wie in Aufgabe XXVII. integrirt, indem man für $2r-y$ seinen Mittelwerth $2r-\frac{b}{2}$ setzt,

16) $t = \frac{r}{\sqrt{A\left(2r-\frac{b}{2}\right)}} \cdot \text{Arc Cos}\,\frac{2y-b}{b}$; folglich die Zeit, in welcher der halbe Weg zurückgelegt wird,

$$= \frac{r\pi}{\sqrt{A\left(2r-\frac{b}{2}\right)}}$$ und also

17) $T = \frac{2r\pi}{\sqrt{A\left(2r-\frac{b}{2}\right)}}$.

Aufgaben zur Ballistik. Fig. 27.

I. Theorie der Bewegung der Projectile im luftleeren Raume.

§. 1. Aufgabe. Die Gleichung für die Flugbahn herzuleiten.

Es bezeichne c die Anfangsgeschwindigkeit, α den Winkel der Wurflinie gegen den Horizont; x jede Abseisse auf dem Horizont in der Ebene der Flugbahn, vom Mittelpuncte der Ausmündung des Geschützes abgerechnet, y die zugehörige lothrechte Ordinate, s die entsprechende Bogenlänge, t die zugehörige Zeit, u die im Endpunct von s noch statt findende Geschwindigkeit und z den Winkel ihrer Richtung mit x; so hat man, weil die Beschleunigung der Gegenwirkung nach lothrechter Richtung gleich der, der Schwere = g, nach horizontaler Richtung, aber = o ist, die 3 Gleichungen:

1) $\partial s_t = u$

2) $\partial^2 y_t = -2g$

3) $\partial^2 x_t = o$. Weil nun $\partial x_t = \text{Cos}z.\partial s_t$ und $\partial y_t = \text{Sin}z.\partial s_t$ oder $\partial x_t = \text{Cos}z.\partial s_t = u\,\text{Cos}z$; und $\partial y_t = \text{Sin}z.\partial s_t = u\,\text{Sin}z$ ist, so folgt aus 3)

4) $\partial x_t = \text{Const} = c\,\text{Cos}\alpha$; und aus 2)

5) $\partial y_t = -2gt + \text{Const} = -2gt + c\,\text{Sin}\alpha$; dann, wenn man abermals integrirt, aus 4)

6) $x = ct\,Cos\,\alpha + Const = ct\,Cos\,\alpha$; und aus 5)

7) $y = -gt^2 + ct\,Sin\,\alpha + Const = -gt^2 + ct\,Sin\,\alpha$.

Eliminirt man nun t aus 6) und 7) so folgt

8) $y = x\,tg\alpha - \frac{g}{c^2\,Cos\,\alpha^2}\cdot x^2$; oder, wenn h die zu c gehörige Fallhöhe bezeichnet, also $c^2 = 4gh$ ist,

9) $y = x\,tg\alpha - \frac{x^2}{4h\,Cos\,\alpha^2}$ aus welcher Gleichung erhellet, daß die Flugbahn eine Parabel ist.

§. 2. Zusatz. Aus §. 1) 9) entspringen für die horizontale Wurfweite X und die Höhe Y des Wurfs folgende Formeln:

1) $X = 2h\,Sin\,2\alpha$

2) $Y = h\,Sin\,\alpha^2$

Aus 1) erhellet, daß, wenn $\beta < 45°$ ist, die Schußweiten zu $45+\beta$ und $45-\beta$ einander gleich sind; ferner daß X ein Maxim. wird, für $\alpha = 45°$; nehmlich $X = 2h$, und daß der Schuß bei 45° also, wenn dieselbe Wurfweite erreicht werden soll, am wenigsten Pulver erfordert.

Bezeichnet X' die Wurfweite zur Anfangsgeschwindigkeit c', so ist, bei einerlei Elevation, aus 1)

3) $X : X' = c^2 : c'^2$ auf welches Gesetz sich die Pulverproben begründen.

Bezeichnen X, X' die Wurfweiten zu den Elevationen α, α', bei einerlei Ladung, also auch derselben Anfangsgeschwindigkeit, so folgt aus 1) auch noch:

4) $X : X' = Sin\,2\alpha : Sin\,2\alpha'$.

§. 3. Aufgabe. Es sei c, α und x gegeben, man soll dadurch z, u und t bestimmen.

Aus §. 1. 9) folgt ∂y_x oder

1) $tgz = tg\alpha - \frac{x}{2h\,Cos\,\alpha^2}$; ferner hieraus und aus $u\,Cos\,z = c\,Cos\,\alpha$ (§. 1. 4,)

2) $u^2 = c^2 - 4g\left[x\,tg\alpha - \frac{x^2}{4h\,Cos\,\alpha^2}\right] = c^2 - 4gy$, und aus §. 1. 6)

3) $t = \frac{x}{c \operatorname{Cos} \alpha}$.

§. 4. Zusatz. Aus §. 3 erhellet, wenn $X = 2h \operatorname{Sin} 2\alpha$ für x gesetzt wird

1) Daß der Einfallswinkel dem Elevationswinkel gleich ist.

2) Daß die Endgeschwindigkeit, der Anfangsgeschwindigkeit gleich ist.

3) Daß die ganze Dauer der Bewegung $= \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{g}$ ist.

§. 5. Aufgabe. Es sei c und der Schlagpunct F (Fig. 27.) durch die Abscisse $x = AE = a$ und den Winkel $EAF = \beta$; also auch $y = EF = a \operatorname{tg} \beta$ gegeben; man soll den erforderlichen Elevationswinkel α bestimmen.

Aus §. 1. 9) folgt

1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{a}[h \mp \sqrt{h^2 - ah \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{4} a^2}]$.

Es finden also 2 Werthe für α statt; werden diese durch α' und α'' bezeichnet, so hat man also

2) $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{2}{a}[h + \sqrt{h^2 - ah \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{4} a^2}]$ und

3) $\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{2}{a}[h - \sqrt{h^2 - ah \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{4} a^2}]$.

§. 6. Zusatz. Aus den Formeln 2) und 3) in §. 5. folgt

1) $\operatorname{tg}(\alpha' + \alpha'') = -\operatorname{Cotg} \beta = -\operatorname{tg}(90 - \beta)$
$= +\operatorname{tg}(90 + \beta)$ also

2) $\alpha' + \alpha'' = 90 + \beta$; und hieraus erhellet

3) $\alpha'' + \frac{\alpha' - \alpha''}{2} = \beta + \frac{90 - \beta}{2}$; d. h. die beiden Wurflinien zu α' und α'' liegen gleichweit von der Linie ab, welche den Complementswinkel zu β halbirt.

§. 7. Aufgabe. Es sei α, a und β gegeben; man soll c bestimmen.

Aus §. 1. 9) folgt

$$h = \frac{c^2}{4g} = \frac{a \operatorname{Cos} \beta}{4 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin}(\alpha - \beta)}.$$

§ 8. Aufgabe. Es sei c und β gegeben; man sucht den-

jenigen Werth von α, welcher die Weite a des Ziels zu einem Maximum macht.

Aus §. 7. folgt $a = \frac{4h}{\cos\beta}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$ und dieser Ausdruck wird am größten, wenn $\alpha = \frac{90+\beta}{2}$; d. h. wenn $\alpha' = \alpha''$ (§ 5) wird. Die größte Weite des Ziels ist dann $= \frac{2h}{\operatorname{tg}\alpha}$ wie aus §. 5. sogleich erhellet.

§. 9. Aufgabe. Es sind (wie beim Ricochetschuß) 2 Puncte der Bahn durch x, y und x', y' bestimmt; man sucht die erforderliche Anfangsgeschwindigkeit c und den nöthigen Elevationswinkel α.

Aus §. 1. 9) erhält man

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x'^2 y - x^2 y'}{xx'[x'-x]}$;

2) $h = \frac{c^2}{4g} = \frac{[x.x']^2.[x'-x]^2 + [x'^2 y - x^2 y']^2}{4xx'[x'-x][x'y-xy']}$.

II. Theorie des Luftwiderstandes.

§. 10. Aufgabe. Mit der Geschwindigkeit u und den darauf normalen Querschnitt a strömt eine Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht δ ist, normal auf eine ruhende Ebene; die Größe der Einwirkung oder des Stoßes zu bestimmen.

Ist die Flüssigkeit nicht in einem begrenzten Raum eingeschlossen, wie etwa Wasser in einem Gerinne, sondern frei, so ist nach den Lehren der Hydraulik, der Stoß $= \frac{a\delta}{4g}.\ u^2$.

§. 11. Zusatz.

1) Eben so groß ist die Wirkung, wenn die Flüssigkeit ruhend ist, und die Ebene a, mit der Geschwindigkeit u, normal auf u, sich in derselben bewegt.

2. Bildet die Ebene mit u den Winkel α, und ist der Querschnitt ihrer Projection, normal auf u, gleich a, so ergiebt sich durch

Zerlegung, die Wirkung nach der Richtung von u, oder der Parallelstoß $= \frac{a\delta}{4g} u^2 \operatorname{Sin} \alpha^2$.

§. 12. Aufgabe. Eine Kugel zum Halbmesser r, von einer Materie, deren specifisches Gewicht $= \lambda$ ist, bewegt sich in der Luft mit der Geschwindigkeit u; den Widerstand der Luft w und die Beschleunigung G dieses Widerstandes zu bestimmen.

Bezeichnet δ das specifische Gewicht der Luft, x jede Abscisse aus dem Scheitelpuncte der Kugel auf dem Durchmesser derselben, in der u entgegengesetzten Richtung genommen, y die zugehörige normale Ordinate, und w den Widerstand der Luft gegen die Calotte zur Höhe x, so ist nach §. 11. 2)

$$dw = \frac{a\delta}{4g} u^2 \operatorname{Sin} \alpha^2, \text{ und wenn}$$

$2y\pi . dy$ für a und $\frac{r-x}{r}$ für $\operatorname{Sin}\alpha$ gesetzt wird; also

$$dw = \frac{2\pi\delta u^2}{4gr^2} (r-x)^2 . y\, dy$$

$$= \frac{\pi\delta u^2}{2gr^2} (r-x)^2 . y . \partial y_x . dx; \text{ folglich weil}$$

$$y^2 = 2rx - x^2 \text{ und also}$$

$$y\partial y_x = r - x \text{ ist,}$$

$$\partial w_x = \frac{\pi\delta u^2}{2gr^2} (r-x)^3; \text{ daher}$$

$$w = \frac{\pi\delta u^2}{2gr^2} \cdot \frac{r^4 - (r-x)^4}{4};$$

und demnach der verlangte Widerstand gegen die Halbkugelfläche

1) $w = \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta r^2 \pi u^2}{4g}$; woraus erhellet, daß derselbe halb so groß ist, als der gegen die Projection $r^2\pi$, normal auf u.

Weil um das Gewicht Q der Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi . \lambda$ ist, so ist $G = g\frac{w}{Q}$ und, wenn man die Werthe für w und Q substituirt

2) $G = \frac{u^2}{\frac{32}{3} \cdot \frac{\lambda}{\delta} \cdot r}$.

Es drückt aber der Nenner dieses Werthes von G, nehmlich $\frac{32}{3}\cdot\frac{\lambda}{\delta}\cdot r$ ein Vielfaches des Kugelhalbmessers r aus, und bezeichnet ϱ diese Anzahl Fuße, so ist dann

3) $G=\frac{u^2}{\varrho}$.

Der Bequemlichkeit in den Formeln wegen, soll in den folgenden Untersuchungen, μ den Bruch $\frac{1}{\varrho}$ bezeichnen, so daß also die Beschleunigung der Gegenwirkung, auch durch

4) $G=\mu.u^2$ auszudrücken ist.

III. Theorie der Bewegung von Kugeln in der Luft.

A) Ohne Berücksichtigung des Gewichts der Kugeln.

§. 13. Aufgabe. Eine Kugel ohne Gewicht, wird mit der anfänglichen Geschwindigkeit c nach irgend einer Richtung in Bewegung gesetzt, und bewegt sich während t Secunden in dieser Richtung unter Gegenwirkung des Luftwiderstandes; es sollen zur Bestimmung des durchlaufenen Weges s und der am Ende der Zeit t noch statt findenden Geschwindigkeit u die erforderlichen zwei Gleichungen hergeleitet werden.

Die der Gegenwirkung zugehörige Beschleunigung ist im letzten Augenblick der Zeit t nach §. 12, gleich $\mu.u^2$; folglich

1) $\partial s_t=u$ und

2) $\partial u_t=-2\mu.u^2$.

Die Integration von 2) giebt nun sogleich

3) $\frac{1}{u}=2\mu t+\text{Const}=2\mu t+\frac{1}{c}$;

4) $u=\frac{c}{1+2\mu tc}$; und substituirt man diesen Werth in 1), so folgt

5) $s=\frac{\ln[1+2\mu tc]}{2\mu}$.

§. 14. Zuſatz. Aus den beiden Formeln 4) und 5) in §. 13. ergeben ſich durch Entwickelung noch folgende zehne; in welchen e die Baſis des natürlichen Log. Syſtems ausdrückt.

1) $t = \frac{e^{2\mu s} - 1}{2\mu c}$;

2) $u = c \cdot e^{-2\mu s}$;

3) $t = \frac{c - u}{2\mu c u}$;

4) $s = \frac{\varrho}{2} \ln \frac{c}{u}$;

5) $c = \frac{e^{2\mu s} - 1}{2\mu t}$;

6) $u = \frac{1 - e^{-2\mu s}}{2\mu t}$;

7) $c = \frac{u}{1 - 2\mu t u}$;

8) $s = \frac{\varrho}{2} \ln \frac{1}{1 - 2\mu t u}$;

9) $c = u \cdot e^{2\mu s}$;

10) $t = \frac{1 - e^{-2\mu s}}{2\mu u}$;

§. 15. Zuſatz. Es erhellet aus den Formeln 3) und 10) in §. 14, ſo wie auch aus der Natur des Gegenſtandes, daß u nie Null wird, d. h. daß t unendlich groß wird, wenn man u = Null ſetzt.

B) Mit Berückſichtigung des Gewichts der Kugeln.

a) Für den lothrechten Fall.

§. 16. Aufgabe. Eine Kugel fällt mit der Anfangsgeſchwindigkeit c lothrecht herab; nach wie viel Secunden t hat ſie die Geſchwindigkeit u, und welchen Weg s hat ſie durchlaufen?

Die Beſchleunigung im Augenblick der Geſchwindigkeit u iſt hier $= g - \mu u^2$; und daher die beiden Grundgleichungen

1) $\partial s_t = u$;

2) $\partial u_t = \partial^2 s_t = 2g - 2\mu u^2$.

Aus 2) entſpringt

3) $\partial t_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g - \mu u^2}$; und hieraus wenn man integrirt, und die Const. aus der Beſtimmung entnimmt daß $u = c$ iſt, für $t = 0$;

4) $t = \frac{1}{4\sqrt{\mu g}} \ln \frac{[\sqrt{g} + u\sqrt{\mu}]\,[\sqrt{g} - c\sqrt{\mu}]}{[\sqrt{g} - u\sqrt{\mu}]\,[\sqrt{g} + c\sqrt{\mu}]}$.

Ferner folgt aus 1) $\partial s_u . \partial u_t = u$; alſo

$$\partial s_u = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{u}{g - \mu u^2} \text{ und hieraus}$$

5) $s = \frac{\varrho}{4} \ln \frac{g - \mu c^2}{g - \mu u^2}$.

§. 17. Zuſatz. Die beiden Formeln 4) und 5, in §. 16. und folgende 10) welche aus jenen Beiden entwickelt ſind, beantworten alle hieher gehörige Fragen:

1) $u = \sqrt{\varrho g} \cdot \left[1 - \frac{2[\sqrt{g} - c\sqrt{\mu}]}{\sqrt{g} - c\sqrt{\mu} + [\sqrt{g} + c\sqrt{\mu}]\, e^{4t\sqrt{\mu g}}}\right]$;

2) $c = \sqrt{\varrho g}\left[-1 + \frac{2[\sqrt{g} + u\sqrt{\mu}]}{\sqrt{g} + u\sqrt{\mu} + [\sqrt{g} - u\sqrt{\mu}]\, e^{4t\sqrt{\mu g}}}\right]$;

3) $u^2 = \varrho[g - (g - \mu c^2)\, e^{-4\mu s}]$;

4) $c^2 = \varrho[g - (g - \mu u^2)\, e^{4\mu s}]$;

5) $s = \frac{\varrho}{2} \ln \frac{[\sqrt{g} + c\sqrt{\mu}]\, e^{2t\sqrt{\mu g}} + [\sqrt{g} - c\sqrt{\mu}]\, e^{-2t\sqrt{\mu g}}}{2\sqrt{g}}$;

6) $s = -\frac{\varrho}{2} \ln \frac{[\sqrt{g} - u\sqrt{\mu}]\, e^{2t\sqrt{\mu g}} + [\sqrt{g} + u\sqrt{\mu}]\, e^{-2t\sqrt{\mu g}}}{2\sqrt{g}}$;

7) $t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \ln \frac{\sqrt{g} \cdot e^{2\mu s} + \sqrt{\mu c^2 + g(-1 + e^{4\mu s})}}{\sqrt{g} + c\sqrt{\mu}}$;

8) $t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \ln \frac{\sqrt{g} \cdot e^{-2\mu s} - \sqrt{\mu \cdot u^2 + g[-1+e^{-4\mu s}]}}{\sqrt{g} - u\sqrt{\mu}}$;

9) $u = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{\mu g}} + e^{-2t\sqrt{\mu g}} - 2 \cdot e^{-2\mu s}}{e^{2t\sqrt{\mu g}} - e^{-2t\sqrt{\mu g}}}$;

10) $c = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{2 \cdot e^{2\mu s} - e^{2t\sqrt{\mu g}} - e^{-2t\sqrt{\mu g}}}{e^{2t\sqrt{\mu g}} - e^{-2t\sqrt{\mu g}}}$;

§. 18. Zusatz. Ist $c = o$; so ergeben sich zur Bestimmung jeder 2 der 3 Größen t, s, u, wenn eine derselben gegeben ist, aus §. 16 und 17 folgende 6 Formeln.

1) $t = \frac{1}{4\sqrt{\mu g}} \ln \frac{\sqrt{g} + u\sqrt{\mu}}{\sqrt{g} - u\sqrt{\mu}}$;

2) $s = \frac{\varrho}{4} \ln \frac{g}{g - \mu u^2}$;

3) $u = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{e^{4t\sqrt{\mu g}} - 1}{e^{4t\sqrt{g\mu}} + 1}$;

4) $u^2 = \varrho g [1 - e^{-4\mu s}]$;

5) $s = \frac{\varrho}{2} \ln \frac{e^{2t\sqrt{\mu g}} + e^{-2t\sqrt{\mu g}}}{2}$;

6) $t = \frac{\ln [e^{2\mu s} + \sqrt{e^{4\mu s} - 1}]}{2\sqrt{\mu g}}$.

§. 19. Zusatz. 1. Aus §. 18. 3) erhellet, daß wenn t sehr groß ist, die Bewegung nahe gleichförmig wird.

2. Für $\mu = o$ erhält man aus den Formeln in §. 16 und 17 die des freien Falls, nehmlich:

1) $u = c + 2gt$;

2) $s = ct + gt^2$; und auch:

3) $u^2 = c^2 + 4gs$.

b) Für das lothrechte Steigen.

§. 20. Aufgabe. Eine Kugel steigt mit der anfänglichen Geschwindigkeit c lothrecht in die Höhe; nach wie viel Secunden t hat sie die Geschwindigkeit u, und welche Höhe s hat sie während dem erstiegen?

Die Grundgleichungen sind hier

1) $\partial s_t = u$

2) $\partial u_t = \partial^2 s_t = -2g - 2\mu u^2$.

Aus 2) entspringt $\partial t_u = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g+\mu u^2}$ und hieraus

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \operatorname{Arc\,tg}\, u\sqrt{\frac{\mu}{g}} + \text{Const.}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu g}} [\operatorname{Arc\,tg}\, c\sqrt{\frac{\mu}{g}} - \operatorname{Arc\,tg}\, u \cdot \sqrt{\frac{\mu}{g}}]; \text{ oder}$$

3) $t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{(c-u)\sqrt{\mu g}}{g+\mu cu}$;

ferner folgt aus 1)

$\partial s_u \cdot \partial u_t = -2(g+\mu \cdot u^2)\partial s_u = u$; also

$\partial s_u = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{g+\mu u^2}$; folglich

$s = -\frac{\varrho}{4} \ln (g+\mu u^2) + \text{Const}$; oder

4) $s = \frac{\varrho}{4} \ln \frac{g+\mu c^2}{g+\mu u^2}$.

§. 21. Zusatz. Die beiden Formeln 3) und 4) in §. 20 und folgende 10, welche aus jenen beiden entwickelt sind, lösen alle hierher gehörige Aufgaben.

1) $u = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{c\sqrt{\mu} - \sqrt{g}\, tg(2t\sqrt{\mu g})}{\sqrt{g} + c\sqrt{\mu}\, tg(2t\sqrt{\mu g})}$

$= \frac{c\, tg(\delta - \beta)}{tg\,\delta}$; wenn $2t\sqrt{\mu g}$ durch β, und

$c\sqrt{\frac{\mu}{g}}$ durch tgδ ausgedrückt wird;

2) $c = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{u\sqrt{\mu} + \sqrt{g} \cdot \mathrm{Tg}(2t\sqrt{\mu g})}{\sqrt{g} - u\sqrt{\mu} \cdot \mathrm{Tg}(2t\sqrt{\mu g})}$

$= \frac{u\,\mathrm{Tg}(\gamma+\beta)}{\mathrm{Tg}\gamma}$, wenn β die Bedeutung in 1) behält,

und $u \cdot \sqrt{\frac{\mu}{g}}$ durch $\mathrm{Tg}\gamma$ bezeichnet wird.

3) $u^2 = (\varrho g + c^2)\, e^{-4\mu s} - \varrho g$;

4) $c^2 = (\varrho g + u^2)\, e^{4\mu s} - \varrho g$;

5) $s = \frac{\varrho}{2} \ln \frac{\mathrm{Cos}(\delta-\beta)}{\mathrm{Cos}\,\delta}$

6) $s = \frac{\varrho}{2} \ln \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma}{\mathrm{Cos}(\gamma+\beta)}$

} Die Bedeutung von β, δ und γ wie in 1) und 2) verstanden.

7) $t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{g}\,[c\sqrt{\mu} - e^{2\mu s}\sqrt{g + \mu c^2} - g e^{4\mu s}}{g e^{4\mu s} - \mu c^2}$;

8) $t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{\sqrt{g}\,[u\sqrt{\mu} - e^{-2\mu s}\sqrt{g + \mu u^2} - g e^{-4\mu s}}{-g e^{-4\mu s} + \mu u^2}$;

9) $u = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{1 - e^{-2\mu s} \cdot \mathrm{Sec}\beta}{\mathrm{tg}\beta}$;

10) $c = \sqrt{\varrho g} \cdot \frac{-1 + e^{2\mu s} \cdot \mathrm{Sec}\beta}{\mathrm{tg}\beta}$.

} Die Bedeutung von β wie in 1) verstanden.

§. 22. Zusatz. Wird in diesen Formeln $u = o$ gesetzt, sucht man also Vergleichungen zwischen der anfänglichen Geschwindigkeit c, der ganzen Steighöhe s′ und der ganzen Zeit t′, in welcher sie erreicht wird, so ergeben sich folgende Formeln:

1) $t' = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}}\,\mathrm{Arctg}\, c\sqrt{\frac{\mu}{g}}$;

2) $s' = \frac{\varrho}{4} \ln \frac{g + \mu c^2}{g}$;

3) $s = \frac{\varrho}{g} \operatorname{Tg}[2t'\sqrt{\mu g}]$;

4) $c = \sqrt{\varrho g} \cdot \sqrt{e^{4\mu s'} - 1}$;

5) $s' = \frac{\varrho}{2} \ln \operatorname{Sec}(2t'\sqrt{\mu g})$;

6) $t' = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \operatorname{Arc\,Sec}\, e^{2\mu s'}$.

§. 23. Zusatz.

1) Fällt die Kugel von Ruhe aus, durch die ganze Höhe $s' = \frac{\varrho}{4} \ln \frac{g+\mu c^2}{g}$; welche sie mit der Anfangsgeschwindigkeit c im Ganzen erreichte, so ist nach §. 18. 4) die erlangte Endgeschwindigkeit $= \sqrt{\varrho g[1 - e^{-4\mu s'}]} = c\sqrt{\frac{g}{g+\mu c^2}}$, also kleiner wie c.

2. Setzt man $s' = \frac{\varrho}{4} \ln \frac{g+\mu c^2}{g}$ in §. 18. 6), so entsteht für die Zeit des Fallens durch diese Höhe s', ohne Anfangsgeschwindigkeit, der Ausdruck

$$\frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \ln \frac{c\sqrt{\mu} + \sqrt{g+\mu c^2}}{\sqrt{g}}.$$

3. Ist die ganze Zeit T, des Steigens und Fallens durch dieselbe Höhe, vermittelst einer Beobachtung bekannt; so ist also

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{c\sqrt{\mu}}{\sqrt{g}} + \ln \frac{c\sqrt{\mu} + \sqrt{g+\mu c^2}}{\sqrt{g}} \right],$$

und diese Gleichung kann zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit c dienen.

4. Für $\mu = 0$ ergeben sich aus den Formeln §. 20 und 21, die der gleichförmig verzögerten Bewegung beim lothrechten Steigen im luftleeren Raum; nehmlich

1) $u = c - 2gt$;

2) $s = ct - gt^2$ und auch

3) $u^2 = c^2 - 4gs$;

und aus §. 22, die folgenden:

1) $c = 2gt'$

2) $s' = gt'^2$ und

3) $c^2 = 4gs'$.

c) Für beliebige Richtungen.

α) Allgemeine Theorie.

§. 24. Aufgabe. Eine Kugel werde unter dem spitzen Winkel α gegen den Horizont, mit der Anfangsgeschwindigkeit c in die Höhe geworfen; die Gleichung für die entstehende Bahn herzuleiten.

Die Horizontale durch den Mittelpunct der Mündung des Geschützes sei die Axe der Abscissen x; y bezeichne die lothrechten Ordinaten; s die Länge des zu x und y gehörigen Bogens der Flugbahn, u die Geschwindigkeit im Endpunct von s; z den Winkel ihrer Richtung mit x; t die Zeit in welcher s durchlaufen wurde, und G die Beschleunigung des Luftwiderstandes während der unendlich kleinen Zeit dt; so hat man die folgenden 3 Grundgleichungen:

1) $\partial s_t = u$

2) $\partial^2 x_t = -2G\,\mathrm{Cos}\,z = -2\mu u^2 . \partial x_s$ und

3) $\partial^2 y_t = -2g - 2G\,\mathrm{Sin}\,z = -2g - 2\mu u^2 . \partial y_s$; also

weil $\partial x_s = \frac{\partial x_t}{\partial s_t}$ und $\partial y_s = \frac{\partial y_t}{\partial s_t}$ ist, wenn der Werth für u aus 1) in 2) und 3) gesetzt wird

4) $\partial^2 x_t = -2\mu \partial s_t . \partial x_t$ und

5) $\partial^2 y_t = -2g - 2\mu \partial s_t . \partial y_t$.

Weil nun y_x verlangt wird, also aus den beiden Gleichungen 4) und 5) t eliminirt werden muß, so entsteht, wenn man in beiden zuvörderst x als urvariable einführt:

6) $-\frac{\partial^2 t_x}{\partial x^3} = -2\mu \cdot \frac{\partial s_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{\partial y_x}$; und

7) $\partial y_x \cdot \partial^2 x_t + \partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 = -2g - 2\mu \frac{\partial s_x}{\partial t_x} \cdot \frac{\partial y_x}{\partial t_x}$;

oder beide vereinfacht:

8) $\partial^2 t_x = 2\mu \partial s_x \cdot \partial t_x$ und

9) $\partial^2 y_x = -2g \cdot \partial t_x^2$.

Die Elimination von ∂t_x und $\partial^2 t_x$ aus 8) und 9) erfordert aber noch eine 3te Gleichung, welche keine höhere Ableitung von t_x enthält, und diese kann aus 9) gebildet werden, wenn man ihre Ableitung nach x darstellt. Es entsteht

10) $\partial^3 y_x = -4g \partial t_x \cdot \partial^2 t_x$; und wenn nun aus 8), 9) und 10) ∂t_x und $\partial^2 t_x$ eliminirt werden, und $\sqrt{1+\partial y_x^2}$ für ∂s_x gesetzt wird, so erhält man zur Bestimmung von y_x die Differenzialgleichung der 3ten Ordnung:

11) $\partial^3 y_x = 4\mu \partial^2 y_x \sqrt{1+\partial y_x^2}$;

welche, 3 mal integrirt, die verlangte Coordinatengleichung liefern wird.

§. 25. Aufgabe. Zu ermitteln, welche Werthe ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ für $x = o$ annehmen, d. h. $[\partial y_x]_o$; $[\partial^2 x]_o$ und $[\partial^3 y_x]_o$ zu bestimmen.

Es ist

1) $\partial y_x = tgz$;

2) $\partial^2 y_x = -\frac{2g}{\partial x_t^2}$ (siehe §. 24. 9)),

und aus $\partial x_t = \frac{\partial x_t}{\partial s_t}$ oder $Cosz = \frac{\partial x_t}{u}$ (siehe §. 24. 1))

folgt $\partial x_t = u\,Cosz$ und daher aus 2)

3) $\partial^2 y_x = -\frac{2g}{u^2 Cosz^2}$; ferner aus §. 24. 11)

4) $\partial^3 y_x = \frac{-8\mu g}{u^2 Cosz^2}\sqrt{1+tg\,z^2} = -\frac{8\mu g}{u^2 Cos\,z^3}$;

folglich, weil, wenn $x = o$ ist, $u = o$ und $z = \alpha$ wird,

5) $[\partial y_x]_o = tg\alpha$;

6) $[\partial^2 y_x]_o = -\frac{2g}{c^2 Cos\alpha^3} = -\frac{1}{2h Cos\alpha^2}$; wenn h die zu c gehörige Fallhöhe bezeichnet, und

7) $[\partial^3 y_x]_o = -\frac{8\mu g}{c^2 Cos\alpha^3} = -\frac{2\mu}{h Cos\alpha^3}$.

Die Werthe in 5) und 6) dienen, wenn die Integrationen von §. 24. 11) ausgeführt sind, zur Bestimmung der Constanten.

§. 26. Aufgabe. Die Integration der Gleichung

$$\partial^3 y_x = 4\mu \partial^2 y_x \sqrt{1+\partial y_x^2} \text{ (§. 24. 11))}$$

auszuführen.

Die erste Integration giebt sogleich

1) $\partial^2 y_x = 2\mu[\partial y_x \sqrt{1+\partial y_x^2} + \ln(\partial y_x + \sqrt{1+\partial y_x^2})] + Const$

und hierzu, für $x = o$, nach §. 25

2) $Const = -\frac{1}{2h Cos\alpha^2} - 2\mu[tg\alpha Sec\alpha + \ln(tg\alpha + Sec\alpha)]$.

Die 2te Integration zu 1) ist aber wegen der transcendenten Form dieser Gleichung nicht vollständig ausführbar, noch weniger die 3te und letzte Integration, und daher auf diesem Wege die Darstellung von y_x nicht zu erwarten, weshalb im folgenden §. ein anderer Weg durch Einführung einer andern Urvariabeln eingeschlagen werden soll.

§. 27. Aufgabe. Es werde tgz durch p bezeichnet; man soll x, y, s, u und t als Functionen von p ausdrücken.

Aus §. 24. 11) folgt, wenn p für tgz, d. h. für ∂y_x geschrieben wird

$\partial^2 p_x = 4\mu\sqrt{1+p^2}.\partial p_x$ und hierzu ist das Integral

$\partial p_x = 2\mu[p\sqrt{1+p^2} + \ln(p+\sqrt{1+p^2})] + Const$; und

$$\text{Const.} = -\frac{1}{2h\,\text{Cos}\,\alpha^2} - 2\mu\,[\text{tg}\,\alpha\,\text{Sec}\,\alpha + \ln(\text{tg}\,\alpha + \text{Sec}\,\alpha)],$$

wie in §. 26. 2)

Bezeichnet daher

P den Ausdruck $p\sqrt{1+p^2} + \ln(p+\sqrt{1+p^2})$, und

A den $\frac{1}{4\mu h\,\text{Cos}\,\alpha^2} + \text{tg}\,\alpha\,\text{Sec}\,\alpha + \ln[\text{tg}\,\alpha + \text{Sec}\,\alpha]$, so ist

$\partial p_x = 2\mu\,[P - A]$; also

$\partial x_p = -\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{1}{A-P}$; und folglich

$$1)\quad x = -\frac{1}{2\mu}\int\frac{dp}{A-P}.$$

Aus $p = \partial y_x = \partial y_p \,.\, \partial p_x = \partial y_p \,.\, 2\mu\,(P - A)$ folgt nun auch

$\partial y_p = -\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{p}{A-P}$; und hieraus

$$2)\quad y = -\frac{1}{2\mu}\int\frac{p\,\partial p}{A-P}.$$

Ferner ergiebt sich, wenn ds_x für $\sqrt{1+p^2}$ (§. 24.) gesetzt wird, aus $\partial^2 p_x = 4\mu\,\partial s_x \,.\, \partial p_x$; sogleich $\frac{\partial^2 p_x}{\partial p_x} = 4\mu\,\partial s_x$; und hierzu das Integral $\ln \partial p_x = 4\mu s + \text{Const}$; worinnen nach §. 25. 6) $\text{Const} = \ln\frac{-1}{2h\,\text{Cos}\,\alpha^2}$ ist. Führt man diesen Werth ein, und schreibt zugleich $2\mu\,(P-A)$ für ∂p_x, so erhält man

$\ln\left[4\mu h\,(A-P)\,\text{Cos}\,\alpha^2\right] = 4\mu s$; und hieraus

$$3)\quad s = \frac{1}{4\mu}\,.\,\ln\left[4\mu h\,(A-P)\,\text{Cos}\,\alpha^2\right].$$

Setzt man nun auch die beiden Werthe für ∂p_x; nehmlich hier $\partial p_x = 2\mu\,(P-A)$ und aus §. 25. 3) ∂p_x oder $\partial^2 y_x$

$$= -\frac{2g}{u^2\,\text{Cos}\,z^2} = -\frac{2g\,\text{Sec}z^2}{u^2} = -\frac{2g\,(1+p^2)}{u^2}$$

einander gleich, und entwickelt dann u^2, so entsteht

$$4)\quad u^2 = \frac{g}{\mu}\cdot\frac{1+p^2}{A-P}.$$

Endlich hat man auch aus $\partial x_s = \frac{\partial x_t}{\partial s_t} = \frac{\partial x_t}{u} = \text{Cos}\, z$;

$\partial x_t = u\, \text{Cos}\, z$; also, wenn der Werth für u aus 4) und

$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ für Cos z geschrieben wird, $\frac{\partial x_p}{\partial t_p} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A-P}}$;

folglich $-\frac{1}{2\mu(A-P)}$ für ∂x_p gesetzt, ∂t_p entwickelt und die Integrati angezeigton

$$5)\ t = -\frac{1}{2\sqrt{\mu g}} \int \frac{dp}{\sqrt{A-P}}\ .$$

§. 28. Zusatz. Nur die Formeln 3) und 4) im vorigen §. sind unmittelbar anwendbar, beantworten aber nicht praktisch wichtige Fragen. Die übrigen 3, welche x, y und t durch p bestimmen, sind nur annähernd zu integriren, doch ist in jedem der 3 Fälle nur eine Integration erforderlich, nicht zweie, wie in §. 26. Die Methoden zur Ausführung dieser annähernden Integrationen sind folgende:

1) für sehr kleine Elevations-Winkel.

Ist $tg\alpha$, also um so mehr $p = tgz$ sehr klein, so kann man die höheren Potenzen von p, von der 2ten ab, ganz außer Betracht lassen, wodurch 1), 2), 5 in § 27. vollständig integrabel werden und praktisch brauchbare Formeln liefern, die in §. 29. bis §. 36. hergeleitet sind.

2) für größere Elevations-Winkel.

Da die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe, zu welcher man sich erhebt, abnimmt, so ist, wenn δ diese Dichtigkeit an der Mündung des Geschützes und δ' die in der Höhe y über diesen Punct bezeichnet, $\frac{\delta'}{\delta}$ ein veränderlicher Bruch, welcher abnimmt, so wie y wächst. Um diese Veränderlichkeit mit in Rechnung zu bringen, vorzüglich aber, um die Gleichung

$$\partial^3 y_x = 4\mu \partial^2 y_x \sqrt{1+\partial y_x^2}\ \ (\S.\ 24.\ 11))$$

vollkommen integrabel zu machen, setzt Borda diesen Bruch $\frac{\delta'}{\delta} = \text{Cos}\,(\alpha - z)$, wodurch freilich eine bedeutendere Abnahme an

Luft-Dichtigkeit ausgedrückt wird, als sie in der Wirklichkeit statt findet, indem schon für $\alpha = 20°$ nach ihr, die Luft-Dichtigkeit δ' im Scheitel der Bahn (also für $z = 0$) sich $= 0{,}94\,\delta$ ergiebt. Obgleich nun aber, bei Annahme dieses Näherungs-Gesetzes, die Integration ausführbar wird, so entsteht doch eine mühsamere Bestimmung dadurch, daß für den absteigenden Zweig der Flugbahn die Luft-Dichtigkeit wieder zunimmt, weshalb für jeden Ast der Curve ein eigener Calcül nothwendig wird. Die Ausführung nach dieser Ansicht enthalten §. 37. bis §. 43.

β) Ausführung für sehr kleine Elevations-Winkel bis etwa 3 Grad.

§. 29. Aufgabe. Die Gleichungen 1), 2), 5 in §. 27. unter der Voraussetzung zu integriren, daß p so klein sei, daß p^2 und die höheren Potenzen von p ganz unberücksichtigt bleiben können.

Bei der erwähnten Voraussetzung, wenn der Elevations-Winkel α etwa 3 Grad ist, ist der höchste Werth von p gleich $\operatorname{tg} 3° = 0{,}0524\ldots$; also $\operatorname{tg} 3°^2 = 0{,}0027\ldots$ und man kann daher annähernd für $\sec z = \sqrt{1+p^2} = 1 + \frac{1}{2}p^2 + \ldots$ blos 1; also auch für $\operatorname{Cos} z = \frac{1}{\sec z}$ blos 1;

für $p + \sqrt{1+p^2}$ daher blos $1 + p$; und für

$\ln(p + \sqrt{1+p^2})$ blos $\ln(1+p) = p - \frac{p^2}{2}\ldots$ d. h. blos p schreiben. Nach §. 27. wird dann

$P = 2p$, und $A = \frac{1}{4\mu h} + 2\operatorname{tg}\alpha$; folglich

1) $x = \frac{\varrho}{4}\ln\left[1 + 8\mu h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} z)\right]$; (aus 1) §. 27)

2) $y = \frac{1 + 8\mu h \operatorname{tg}\alpha}{32\mu^2 h}\ln\left[1 + 8\mu h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} z)\right]$

$- \frac{\varrho}{4}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} z)$; (aus 2) §. 27) und

3) $t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\mu h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} z)}}{2\mu c}$; (aus 5) §. 27)

und die Formeln 3) und 4) in §. 27. werden folgende:

4) $s = \frac{\varrho}{4} \ln[1+8\mu h\,(tg\alpha - tgz)]$, also $= x$, indem nach der Voraussetzung $\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\partial y_x^2}$ oder $\partial s_x = 1$; folglich $s = x$ angenommen ist;

5) $u = \frac{c}{\sqrt{1+8\mu h\,(tg\alpha - tgz)}}$.

§. 30. Aufgabe. Es sollen tgz oder p, y, t, u und s als Functionen von x dargestellt werden.

Durch Entwickelung erhält man aus §. 29.

1) $tgz = tg\alpha - \frac{e^{4\mu x} - 1}{8\mu h}$;

2) $y = x\,tg\alpha - \frac{e^{4\mu x} - 4\mu x - 1}{32\mu^2 h}$;

3) $t = \frac{e^{2\mu x} - 1}{2\mu c}$.

4) $u = \frac{c}{e^{2\mu x}}$;

5) $s = x$.

§. 31. Aufgabe. Für den Scheitelpunct der Flugbahn, d. h. für $p = tgz = o$; die zugehörige Abscisse X', d. h. die Weite des aufsteigenden Zweiges, die zugehörige, also die größte Ordinate Y, d. h. die Höhe des Wurfs, die Zeit T', in welcher der Scheitel erreicht wird, und die Geschwindigkeit c' daselbst, durch c und α auszudrücken.

Es ergiebt sich sogleich

1) $X' = \frac{\varrho}{4} \ln[1+8\mu h\,tg\alpha]$; (aus §. 29. 1))

2) $Y = \frac{1+8\mu h\,tg\alpha}{32\mu^2 h} \ln[1+8\mu h\,tg\alpha] - \frac{\varrho}{4} tg\alpha$; (aus §. 29. 2).

3) $T' = \frac{-1+\sqrt{1+8\mu h\,tg\alpha}}{2\mu c}$; (aus §. 29. 3))

4) $c' = \frac{c}{\sqrt{1+8\mu h \operatorname{tg}\alpha}}$; (aus §. 29. 5)).

§. 32. Aufgabe. Die ganze Wurfweite X auf horizontalen Terrain, den spitzen Einfallswinkel α'', die Zeit T des ganzen Wurfs und die Einfallsgeschwindigkeit c'' durch c und α auszudrücken.

Setzt man in 2) §. 30. Null für y, so entsteht zur Bestimmung der Wurfweite X, die transcendente Gleichung:

1) $e^{4\mu X} - 4\mu[1+8\mu h \operatorname{tg}\alpha].X - 1 = 0$; und wenn hieraus X ermittelt ist, so hat man dann

2) $\operatorname{tg}[360 - \alpha''] = \operatorname{tg}\alpha - \frac{e^{4\mu X}-1}{8\mu h}$; (aus §. 30. 1)).

3) $T = \frac{e^{2\mu X}-1}{2\mu c}$; (aus §. 30. 3)) .

4) $c'' = \frac{c}{e^{2\mu X}}$; (aus §. 30. 4)) .

§. 33. Aufgabe. Die Anfangsgeschwindigkeit c durch Beobachtung zu ermitteln.

Bequemer als die in Beziehung auf c transcendente Gleichung §. 23. 3) ist die §. 32. 3), aus welcher, wenn die Werthe von T und X durch eine Beobachtung ermittelt sind, sich

1) $c = \frac{e^{2\mu X}-1}{2\mu T}$ ergiebt, bei welcher Bestimmung der Elevationswinkel α nicht erforderlich ist.

Hat man α und X gemessen, so liefert §. 32. 1) zur Bestimmung von c die Formel

2) $h = \frac{c^2}{4g} = \frac{e^{4\mu X} - 4\mu X - 1}{32\mu^2 X \operatorname{tg}\alpha}$.

§. 34. Aufgabe. Es ist die Ladung, d. h. die Anfangsgeschwindigkeit c und der Schlagpunct F durch die Coordinaten AE = x und EF = y gegeben; man sucht die Wurflinie, d. h. den erforderlichen Elevationswinkel α.

Aus §. 30. 2) erhält man sogleich

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} + \frac{e^{4\mu x} - 4\mu x - 1}{32\mu^2 hx}.$$

§. 35. Aufgabe. Es ist der Elevationswinkel α und der Schlagpunct F durch die Coordinaten x und y gegeben; man sucht die Anfangsgeschwindigkeit c.

Aus §. 30. 2) entsteht

$$h = \frac{c^2}{4g} = \frac{e^{4\mu x} - 4\mu x - 1}{32\mu^2 [x\operatorname{tg}\alpha - y]}.$$

§. 36. Aufgabe. Es sind, wie in §. 9., zwei Puncte der Bahn durch x, y und x', y' bestimmt; man soll die nöthige Anfangsgeschwindigkeit c und den erforderlichen Elevationswinkel α bestimmen.

Aus der Formel §. 30. 2) für beide Coordinaten-Paare dargestellt, erhält man durch Entwickelung

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y[e^{4\mu x'} - 4\mu x' - 1] - y'[e^{4\mu x} - 4\mu x - 1]}{x[e^{4\mu x'} - 4\mu x' - 1] - x'[e^{4\mu x} - 4\mu x - 1]};$$

$$2)\ h = \frac{c^2}{4g} = \frac{x[e^{4\mu x'} - 4\mu x' - 1] - x'[e^{4\mu x} - 4\mu x - 1]}{32\mu^2 [x'y - xy']}.$$

γ) Ausführung für größere Elevations-Winkel bis circa 20 Grad. (§. 28. 2))

§. 37. Aufgabe. Für den aufsteigenden Zweig nach Borda's angenommenen Gesetz (§. 28. 2)) x, y, u und t als Functionen von $p = \operatorname{tg} z$ auszudrücken.

Im Endpunct von y also an der Stelle, wo die Tangente der Bahn mit dem Horizont den Winkel z bildet, ist nach dem angenommenen Gesetz die Luftdichtigkeit, oder das specifische Gewicht δ' der Luftschicht daselbst $= \delta \operatorname{Cos}(\alpha - z)$; folglich die Beschleunigung G des Luftwiderstandes an dieser Stelle

$$= \frac{u^2}{\frac{32}{3} \cdot \frac{\lambda}{\delta'} \cdot r} \quad \text{oder}$$

$$G = \frac{u^2}{\frac{32}{3} \cdot \frac{\lambda}{\delta} r} \operatorname{Cos}(\alpha - z) = \frac{u^2}{\varrho} \operatorname{Cos}(\alpha - z)$$

$$= \mu \operatorname{Cos}(\alpha - z) \cdot u^2 \; ; \; (\S.\ 12.\ 2)) ;$$

folglich wenn hiernach, $\mu \operatorname{Cos}(\alpha - z)$ für μ in die Gleichung

$$\partial^2 p_x = 4\mu \partial p_x \sqrt{1 + p^2} \quad (\S.\ 27.),$$

und zugleich $\operatorname{Sec} z$ für $\sqrt{1 + p^2}$ gesetzt wird,

$$\partial^2 p_x = 4\mu \operatorname{Cos}(\alpha - z) \operatorname{Sec} z \, \partial p_x, \text{ oder auch}$$

$$\partial^2 p_x = 4\mu \operatorname{Cos}\alpha \cdot \partial p_x + 4\mu \operatorname{Sin}\alpha \cdot p \partial p_x,$$

wozu die Integral-Gleichung

$$\partial p_x = 4\mu \operatorname{Cos}\alpha \cdot p + 2\mu \operatorname{Sin}\alpha \cdot p^2 + \text{Const.},$$

und nach §. 25.

$$\text{Const.} = -\frac{1}{2h \operatorname{Cos}\alpha^2} - 4\mu \operatorname{Sin}\alpha - 2\mu \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha^2 \text{ ist.}$$

Bezeichnet nun

q den Ausdruck $p + \operatorname{Cotg}\alpha$

A^2 den $1 + \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{4\mu h}$; und

B den $\frac{A}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha}$,

so erhält man, durch diese Zeichen ausgedrückt,

$\partial p_x = 2\mu \operatorname{Sin}\alpha \, [q^2 - B^2]$; oder, weil

$\partial x_p = \partial x_q \cdot \partial q_p = \partial x_q$ ist,

$\partial x_q = \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \frac{1}{q^2 - B^2}$; folglich, integrirt

$x = \frac{1}{4\mu B \operatorname{Sin}\alpha} \ln \frac{q - B}{q + B} + \text{Const.}$; und daher

1) $x = \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{4\mu A} \ln \frac{(B - q)(A + 1)}{(B + q)(A - 1)}$.

Ferner folgt, aus

$\partial y_x = p = q - \operatorname{Cotg}\alpha = \partial y_q, \partial q_x = \partial y_q \cdot 2\mu \operatorname{Sin}\alpha \, [q^2 - B^2]$;

die Gleichung

$$\partial y_q = \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \frac{q - \operatorname{Cotg}\alpha}{q^2 - B^2} \; ; \text{ oder}$$

$$\partial y_q = \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \frac{q}{q^2 - B^2} - \operatorname{Cotg}\alpha \, . \, \partial x_q \; ; \text{ und hieraus}$$

$$y = \frac{1}{4\mu \operatorname{Sin}\alpha} \ln (q^2 - B^2) - x \operatorname{Cotg}\alpha + \text{Const.} \; ;$$

oder, nach Bestimmung der Const. und Substitution des Werthes von x aus 1),

$$2) \quad y = \frac{1}{4\mu \operatorname{Sin}\alpha} \ln \frac{A^2 \, . \, (B^2 - q^2)}{B^2 \, (A^2 - 1)} - \frac{\operatorname{Cos}\alpha^2}{4\mu A \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \ln \frac{(B - q)(A + 1)}{(B + q)(A - 1)} \, .$$

Wird nun auch der in §. 27. für ∂p_x ermittelte Werth, nehmlich $\partial p_x = -\frac{2g(1 + p^2)}{u^2}$, dem hier dargestellten

$\partial p_x = 2\mu \operatorname{Sin}\alpha \, (q^2 - B^2)$ gleich gesetzt, so folgt

$$3) \quad u^2 = \frac{g(1 + p^2)}{\mu \operatorname{Sin}\alpha \, (B^2 - q^2)} \, .$$

Endlich hat man auch, nach §. 27.,

$u \operatorname{Cos} z = \partial x_t = \partial x_q \, . \, \partial q_t$; daher

$$\partial t_q = \frac{\partial x_q}{u \operatorname{Cos} z} = \partial x_q : \sqrt{\frac{g}{\mu \operatorname{Sin}\alpha \, (B^2 - q^2)}} \; ;$$

und also, wenn für ∂x_q sein hier bestimmter Werth

$\frac{1}{2\mu \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \frac{1}{q^2 - B^2}$ geschrieben wird

$$\partial t_q = -\frac{1}{2\sqrt{\mu g \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \sqrt{B^2 - q^2}} \; , \text{ und hieraus}$$

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{\mu g \operatorname{Sin}\alpha}} \, . \, \operatorname{Arc\,Sin}\frac{q}{B} + \text{Const.} \; ; \text{ folglich}$$

$$4) \quad t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g \operatorname{Sin}\alpha}} \left[\operatorname{Arc\,Sin}\frac{1}{A} - \operatorname{Arc\,Sin}\frac{q}{B} \right] .$$

§. 38. Aufgabe. Es sollen p, y, u und t als Functionen von x dargestellt werden.

Durch Entwickelung entsteht aus §. 37.

1) $\mathrm{tg}z = p = \dfrac{2B(A+1)}{A+1+(A-1)\,e^{4\mu A x \mathrm{Sec}\alpha}} - B - \mathrm{Cotg}\alpha.$

2) $Y = (B - \mathrm{Cotg}\alpha)\,x - \dfrac{1}{2\mu \mathrm{Sin}\alpha} \times$

$$\ln \frac{A+1+(A-1)\,e^{4\mu A x \mathrm{Sec}\alpha}}{2A};$$

3) $u^2 = \dfrac{g}{4\mu B^2 \mathrm{Sin}\alpha} \cdot \left[\dfrac{2}{\mathrm{Sin}\alpha^2} - 2B^2\right.$

$$+\frac{A+1}{A-1}\left[1+(B-\mathrm{Cotg}\alpha)^2\right] e^{-4\mu A x \mathrm{Sec}\alpha}$$

$$\left.+\frac{A-1}{A+1}\left[1+(B+\mathrm{Cotg}\alpha)^2\right] e^{4\mu A x \mathrm{Sec}\alpha}\right];$$

4) $t = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu g \mathrm{Sin}\alpha}} \left[\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{1}{A} - \right.$

$$\left.\mathrm{Arc\,Sin}\left[-1+\frac{2(A+1)}{A+1+(A-1)\,e^{4\mu A x \mathrm{Sec}\alpha}}\right]\right].$$

§. 39. Aufgabe. Die Weite X′ des aufsteigenden Zweiges, die Wurfhöhe Y so wie auch die entsprechende Zeit T′ und die zugehörige Geschwindigkeit c′ im Scheitel durch α und c auszudrücken.

Man setze Null für p oder tgz, so geben die Formeln in §. 37.

1) $X' = \dfrac{\mathrm{Cos}\alpha}{4\mu A} \ln \dfrac{(A-\mathrm{Cos}\alpha^2)(A+1)}{(A+\mathrm{Cos}\alpha^2)(A-1)};$

2) $Y = \dfrac{1}{4\mu \mathrm{Sin}\alpha} \ln \dfrac{A^2-\mathrm{Cos}\alpha^4}{A^2-1} - \dfrac{\mathrm{Cos}\alpha^2}{4\mu A \mathrm{Sin}\alpha} \times$

$$\ln \frac{(A-\mathrm{Cos}\alpha^2)(A+1)}{(A+\mathrm{Cos}\alpha^2)(A-1)};$$

3) $T' = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu g \mathrm{Sin}\alpha}} \left[\mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{1}{A} - \mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\mathrm{Cos}\alpha^2}{A}\right];$

4) $c'^2 = \dfrac{g}{\mu \mathrm{Sin}\alpha \cdot (B^2 - \mathrm{Cotg}\alpha^2)};$ oder auch, und zwar genauer, aus §. 27. 4)

$$c'^2 = \frac{c^2 \mathrm{Cos}\alpha^2}{1+4\mu h \mathrm{Cos}\alpha^2\,[\mathrm{tg}\alpha \mathrm{Sec}\alpha + \ln(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{Sec}\alpha)]}.$$

§. 40. Aufgabe. Für den absteigenden Zweig nach Borda's Gesetz, wenn der Scheitelpunct D der Bahn als Anfangspunct der horizontalen Abscissen x' angenommen wird, die Ordinaten y' lothrecht gedacht werden, und z' den spitzen Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Endpunct von y' mit dem Horizont bildet, u' aber die in diesem Punct statt findende Geschwindigkeit und t', die Zeit ausdrückt, in welcher der zugehörige Bogen s' mit der Anfangsgeschwindigkeit c' durchlaufen wurde, sollen x', y', u' und t' als Functionen von z' ausgedrückt werden.

Ganz wie in §. 24. erhält man auch hier

$$\partial^2 x'_{t'} = -2\mu\,\partial s'_{t'} \cdot \partial x'_{t'} \text{ und}$$

$$\partial^2 y'_{t'} = +2g - 2\mu\,\partial s'_{t'} \cdot \partial y'_{t'} ,$$

und hieraus, weil nur das Zeichen von g verändert werden darf, wie in §. 24.

$$\partial^2 t'_{x'} = 2\mu\,\partial s'_{x'} \cdot \partial t'_{x'} \text{ und}$$

$$\partial^2 y'_{x'} = 2g\,\partial t'^2_{x'} \text{ ; also auch}$$

$$\partial^3 y'_{x'} = 4\mu\,\partial^2 y'_{x'} \cdot \sqrt{1 + \partial y'^2_{x'}} \text{ oder,}$$

$$\partial y'_{x'} = \operatorname{tg} z' \text{ durch } p' \text{ ausgedrückt;}$$

$$\partial p'_{x'} = 2g\,\partial t'^2_{x'} = \frac{2g}{[\partial x'_{t'}]^2} = \frac{2g}{[u' \operatorname{Cos} z']^2} \text{ und}$$

$$\partial^2 p'_{x'} = 4\mu\,\partial p'_{x'} \sqrt{1 + p'^2} .$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt nun, ganz so wie beim aufsteigenden Zweig,

$$dp'_{x'} = 4\mu \operatorname{Cos}\alpha \cdot p' + 2\mu \operatorname{Sin}\alpha \cdot p'^2 + \text{Const.},$$

worinnen $\text{Const.} = \frac{2g}{c'^2}$; oder, wenn h' die zu c' gehörige Fallhöhe im luftleeren Raum bezeichnet, $\text{Const.} = \frac{1}{2h'}$ ist.

Wird nun $p' + \operatorname{Cotg}\alpha$ durch q' ausgedrückt, so entspringt aus der letzten Gleichung

$$\partial x'_{p'} = \partial x'_{q'} = \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin}\alpha} \cdot \frac{1}{q'^2 - \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha^2}} \cdot \frac{1}{\left[\operatorname{Cos}\alpha^2 - \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{4\mu h'}\right]} .$$

Je nachdem nun $\mathrm{Cos}\,\alpha^2 \gtrless \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'}$ ist, ändert sich die reelle Form des Integrals.

Ist I. $\mathrm{Cos}\,\alpha^2 > \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'}$; und wird

$$\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'} = \left(\frac{A'}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\right)^2 \text{ und } \frac{A'}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha} = B'$$

gesetzt, so folgt

$$1)\quad x' = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{4\mu A'} \ln \frac{(q'-B')\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + A')}{(q'+B')\,(\mathrm{Cos}\,\alpha^2 - A')}.$$

Ist II. $\mathrm{Cos}\,\alpha^2 < \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'}$; und wird

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'} - \mathrm{Cos}\,\alpha^2 = \left(\frac{A''}{\mathrm{Cos}\,\alpha}\right)^2 \text{ und } \frac{A''}{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha} = B''$$

gesetzt, so folgt

$$2)\quad X' = \frac{\mathrm{Cos}\,a}{2\mu A''}\left[\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{q'}{B''} - \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha^2}{A''}\right].$$

Ist III. $\mathrm{Cos}\,\alpha^2 = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'}$; so erhält man

$$3)\quad X' = \frac{1}{2\mu\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\left[\mathrm{tg}\alpha - \frac{t}{q'}\right].$$

Zur Bestimmung von y' nach z' hat man

$$\partial y'_{x'} = p' = \mathrm{tg}z' = q' - \mathrm{Cotg}\,\alpha = \partial y'_{q'} \cdot \partial q'_{x'}$$
$$= \partial y'_{q'} \cdot 2\mu\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,[q'^2 - B'^2];\ \text{also}$$

$$\partial y'_{q'} = \frac{1}{2\mu\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\cdot\frac{q'}{q'^2 - B'^2} - \mathrm{Cotg}\,\alpha \cdot \partial x'_{q'};\ \text{folglich}$$

$$y' = \frac{1}{4\mu\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\ln[q'^2 - B'^2] - x'\,\mathrm{Cotg}\,\alpha + \mathrm{Const};\ \text{und daher}$$

$$4)\quad y' = \frac{1}{4\mu\,\mathrm{Sin}\,\alpha}\ln\frac{q'^2 - B'^2}{\mathrm{Cotg}\,\alpha^2 - B'^2} - x'\,\mathrm{Cotg}\,\alpha;$$

unter x' denjenigen der 3 Ausdrücke in 1), 2) oder 3) verstanden, welcher der besondern Bedingung in Beziehung auf die Vergleichung von $\mathrm{Cos}\,\alpha^2$ und $\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{4\mu h'}$ entspricht.

Die Darstellung von u' durch z' folgt aus:

$\partial p'_{x'} = \frac{2g}{[u' \operatorname{Cos} z']^2} = 2\mu \operatorname{Sin} \alpha [q'^2 - B'^2]$ und es entsteht:

5) $u'^2 = \frac{g(1+p'^2)}{\mu \operatorname{Sin} \alpha [q'^2 - B'^2]}$.

Endlich erhält man auch noch aus

$u' \operatorname{Cos} z' = \partial x'_{t'} = \partial x'_{q'} : \partial t'_{q'}$ die Gleichung

$$\partial t'_{q'} = \frac{1}{2\sqrt{\mu g \operatorname{Sin} \alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{q'^2 - B'^2}} ;$$ und hieraus

6) $$t' = \frac{1}{2\sqrt{\mu g \operatorname{Sin} \alpha}} \cdot \ln \frac{q' + \sqrt{q'^2 - B'^2}}{\operatorname{Cotg} \alpha + \sqrt{\operatorname{Cotg} \alpha^2 - B'^2}}.$$

§. 41. Aufgabe. Es sollen z', y', u' und t' als Functionen von x' dargestellt werden.

Man erhält aus §. 40:

im Fall I.

1) $$\operatorname{tg} z' = \frac{A' + \operatorname{Cos} \alpha^2}{A \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha} \left[-1 + \frac{2A'}{A' + \operatorname{Cos} \alpha^2 + [A' - \operatorname{Cos} \alpha^2] e^{4\mu A' x' \sec \alpha}} \right] ;$$

2) $$y' = \frac{A' - \operatorname{Cos} \alpha^2}{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha} \cdot x' + \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin} \alpha} \times \ln \frac{2A'}{A' + \operatorname{Cos} \alpha^2 + [A' - \operatorname{Cos} \alpha^2] e^{4\mu A' x' \sec \alpha}} ;$$

im Fall II.

3) $$\operatorname{tg} z' = -\operatorname{Cotg} \alpha + B'' \operatorname{Tg} \left[2\mu A'' x' \sec \alpha + \operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{Cos} \alpha^2}{A''} \right]$$

oder $\operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{Cos} \alpha^2}{A''}$ durch φ ausgedrückt,

4) $$\operatorname{tg} z' = \frac{\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} (2\mu A'' x' \sec \alpha)}{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} (\varphi + 2\mu A'' x' \sec \alpha)} ;$$

und, weil $-(B')^2 = +(B'')^2$ ist

5) $$y' = -x' \operatorname{Cotg} \alpha + \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin} \alpha} \ln \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} (\varphi + 2\mu A'' x' \sec \alpha)} ;$$

im Fall III.

6) $\operatorname{tg} x' = \frac{2\mu x' \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 2\mu x' \operatorname{Sin} \alpha}$; und

7) $y' = -x' \operatorname{Cotg} \alpha - \frac{1}{2\mu \operatorname{Sin} \alpha} \ln [1 - 2\mu x' \operatorname{Cos} \alpha]$.

In jedem dieser 3 Fälle erhält man auch u' und t', wenn der zugehörige Werth für p' in §. 40. 5) und 6) gesetzt wird, welches am bequemsten erst nach vorhergegangener Berechnung dieses Werthes erfolgen wird.

§. 42. Aufgabe. Die Weite X'' des absteigenden Zweiges den Einfallswinkel α''; die Geschwindigkeit c'' im Einfallspunct, und die Zeit T'', in welcher der absteigende Zweig durchlaufen wird, zu bestimmen.

Man setze den Werth für Y aus §. 39. 2), in §. 41, 2), 5) oder 7), je nachdem $\operatorname{Cos} \alpha^2 \gtreqless \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{4\mu h'}$ ist, so ergiebt sich die transcendente Gleichung zur Bestimmung von X''.

2) Ist X'' ermittelt, so giebt dann §. 41. 1), 4) oder 6) in den erwähnten 3 Fällen den Werth von $\operatorname{tg} \alpha''$, wenn man X'' für x' setzt.

3) Die Formel 5) in §. 40. giebt dann, wenn $\operatorname{tg} \alpha''$ für $\operatorname{tg} x'$ oder p' gesetzt wird, die Endgeschwindigkeit c''.

4) Die Formel 6) in §. 40. giebt eben so, wenn $\operatorname{tg} \alpha''$ für p' gesetzt wird, die Zeit T'' und es entsteht, wenn h'' die zu c'' gehörige Fallhöhe ausdrückt:

$$T'' = \frac{1}{2\sqrt{\mu g \operatorname{Sin} \alpha}} \ln . \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \alpha''}{4\mu h''}} + \operatorname{Cos} (\alpha'' - \alpha)}{\left[\sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{4\mu h'}} + \operatorname{Cos} \alpha\right] . \operatorname{Cos} \alpha''} .$$

§. 43. Aufgabe. Die ganze Wurfweite X auf horizontalem Terrain und die Zeit T der Durchlaufung der zugehörigen Bahn zu bestimmen.

Aus §. 39. und 42. folgt:

1) $X = X' + X''$ und

2) $T = T' + T''$.

IV. Von dem Uebergang einer bewegten Kugel aus einem Mittel in ein anderes, der theoretischen Bestimmung der Anfangs-Geschwindigkeit der Kugel, und des Rücklaufes des Geschützes.

§. 44. Aufgabe. Eine Kugel treffe mit der Geschwindigkeit v einen unerschütterlichen Körper, dessen rückwirkende Festigkeit für jede Flächen-Einheit = p sei. Vorausgesetzt nun, daß die Kugel höchstens bis zu ihrem Mittelpunct in dieses Mittel eindringe, so soll eine Gleichung zwischen v, p dem Halbmesser r der Kugel, dem specifischen Gewicht λ ihrer Materie, und der Tiefe z des gänzlichen Eindringens hergeleitet werden.

Dringt die Kugel in der Zeit t zur Tiefe x ein, bezeichnet y die zu x gehörige normale Ordinate, α den entsprechenden Mittelpuncts-Winkel, u die Geschwindigkeit der Kugel während der unendlich kleinen Zeit dt, und W_x den Widerstand des unerschütterlichen Körpers gegen die Calotte $2r\pi x$ in der Richtung der Bahn, so ist der Widerstand, wenn er gegen die Ebene $2\pi y dy$ statt fände $= 2\pi y dy . p$; und da derselbe gegen die Zone $2r\pi dx$ sich äußert, so entspringt daraus durch Zerlegung der Widerstand gegen diese Zone, in der Richtung der Bahn, oder

1) $dW_x = 2\pi y dy . p . \mathrm{Cos}\,\alpha^2$. (§. 11. 2)),

Aus dieser Gleichung entsteht, wenn $\partial y_x dx$ für dy; $\partial W_x . dx$ für dW_x; $r - x$ für $y\partial y_x$ und $\frac{r-x}{r}$ für $\mathrm{Cos}\,\alpha$ gesetzt wird

2) $\partial W_x = \frac{2\pi p}{r^2}(r-x)^2$; also, wenn man integrirt

3) $W_x = -\frac{\pi p}{2r^2}(r-x)^4 + \mathrm{Const}.$

Für $x = o$, ist aber auch $W = o$, also $\mathrm{Const} = \frac{\pi p r^4}{2r^2}$ folglich:

4) $W_x = \frac{\pi p}{2r^2}[r^4 - (r-r)^4]$.

Es wirkt aber dieser Widerstand W_x im letzten Augenblick der Zeit t, der Bewegung der Kugel gerade entgegen gesetzt, auf die

Masse $m = \frac{4}{3} r^3 \pi \lambda$ derselben, und folglich ist in diesem Augenblick die Beschleunigung der Gegenwirkung

$$= g \frac{\pi p}{2 r^2 m} [r^4 - (r-x)^4];$$

daher, den beiden Gleichungen der verzögerten geradlinigten Bewegung gemäß:

5) $u = \partial x_t$ und

6) $\partial u_t = -\frac{g \pi p}{r^2 m} [r^4 - (r-x)^4]$.

Das Product beider Gleichungen giebt

7) $u \partial u_t = -\frac{g \pi p}{r^2 m} [r^4 - (r-x)^4] . \partial x_t$ oder

8) $2 u \partial u_x = -\frac{2 g \pi p}{r^2 m} [r^4 - (r-x)^4]$; und integrirt

9) $u^2 = -\frac{2 g \pi p}{r^2 m} [r^4 x + \frac{1}{5} (r-x)^5] + \text{Const}$

worinnen, weil mit $x = o$; $u = v$ wird

$$\text{Const} = v^2 + \frac{2 g \pi p}{r^2 m} . \frac{r^5}{5}$$ sich ergiebt.

Substituirt man diesen Werth, so folgt:

10) $u^2 = v^2 - \frac{2 g \pi p}{5 r^2 m} [10 r^3 x^2 - 10 r^2 x^3 + 5 r x^4 - x^5]$,

und setzt man nun o für u und z für x, so entsteht die verlangte Gleichung, nehmlich:

11) $z^5 - 5 r z^4 + 10 r^2 z^3 - 10 r^3 z^2 - \frac{10 r^5 v^2 \lambda}{3 g p} = o$.

Aus 4) ergiebt sich auch noch

12) $W_r = \frac{1}{2} r^2 \pi p$, wodurch dasselbe Widerstands-Gesetz ausgedrückt ist, wie in §. 12. 1).

§. 45. Aufgabe. Eine Kugel zum Halbmesser r, und der Masse $m = \frac{4}{3} r^3 \pi \lambda$ trifft mit der Geschwindigkeit v eine ruhende, aber bewegungsfähige Masse M, welche auf jede Flächen-Einheit den normalen Widerstand p entgegensetzt. Vorausgesetzt nun, daß die Tiefe Y des totalen Eindringens derselben in M, größer wie

r werde, das Eindringen zur Tiefe r aber augenblicklich erfolge, so soll durch r, m, v, M, p nicht nur Y, sondern auch die Zeit T dieses gänzlichen Eindringens, der Weg X, den M in dieser Zeit T durchläuft, und die Geschwindigkeit V bestimmt werden, mit welcher nach beendigtem Eindringen m und M ihre Bewegung gemeinschaftlich fortsetzen.

Nachdem die Kugel bis zu ihrem Mittelpunct in M eingedrungen ist, wird der Widerstand w constant und zwar

$$w = \tfrac{1}{4} r^2 p \pi ;$$

und es ist daher die Beschleunigung der Masse $M = g\frac{w}{M}$ und die Beschleunigung der Gegenwirkung auf m, $= g\frac{w}{m}$; jene führt die Masse M aus Ruhe in der Zeit T durch den Weg X und ertheilt ihr die Geschwindigkeit V; durch diese wird die Geschwindigkeit v von m während der Zeit T vermindert, so daß sie nach Durchlaufung des Wegs X + Y nur noch gleich V ist. Diese Angaben liefern folgende 4 Gleichungen:

1) $X = g\frac{w}{M}T^2$;

2) $V = 2g\frac{w}{M}T$;

3) $X + Y = vT - g\frac{w}{m}T^2$ und

4) $V = v - 2g\frac{w}{M}T$.

Durch Entwicklung erhält man hieraus:

5) $Y = \frac{v^2 m M}{4gw(M+m)}$;

6) $T = \frac{vmM}{2gw(M+m)}$;

7) $X = \frac{v^2 m^2 M}{4gw(M+m)^2}$;

8) $V = \frac{vm}{M+m}$.

§. 46. Aufgabe. Durch die Masse der Kugel, die Abmessungen des Geschützes und die Elasticität des Gases im Augenblick der Entzündung des Pulvers, die Geschwindigkeit v zu bestimmen, mit welcher die Kugel aus dem Rohr tritt, vorausgesetzt, daß kein Rücklauf des Geschützes statt finde.

Bezeichnet m die Masse der Kugel, r ihren Halbmesser, λ ihre Dichtigkeit, a die Länge der Kammer, A die Seele d. h. die ganze Länge des Rohrs, ist die Elasticität vom Gas im Augenblick seiner Entwicklung n mal so groß als die der atmosphärischen Luft an der Meeres-Oberfläche, und nimmt dieselbe in demselben Verhältniß ab, in welchem der Raum, den das Gas anfänglich erfüllt, wächst; durchläuft die Kugel vom Beginn ihrer Bewegnng an, in den ersten t Secunden den Theil x von ihrem ganzen Weg A — a im Rohr, und besitzt im letzten Augenblick der Zeit t die Geschwindigkeit u, so wirken während der unendlich kleinen Zeit dt auf die Kugel zwei Kräfte, der Gegendruck der Luft, welcher im Mittel gleich ist dem Gewicht einer Wassersäule von 32 Fuß Höhe, also $= r^2\pi.32.\gamma$; und die Gewalt des Gases

$$= n.r^2\pi.32.\gamma.\frac{a}{a+x},$$

so daß also die Ueberwucht, welche die Kugel in der Zeit dt aus dem Rohr treibt

$$= 32\pi r^2\gamma\left[\frac{na}{a+x}-1\right];$$

folglich die entsprechende Beschleunigung

$$G = g\frac{32\pi r^2\gamma}{m}\left[\frac{na}{a+x}-1\right] \text{ ist.}$$

Es entsteht daher hier aus den beiden Grundgesetzen $dx_t = u$ und $\partial u_t = 2G$; die Gleichung

$$1)\ u\partial u_t = 2g\frac{32\pi r^2\gamma}{m}\left[\frac{na}{a+x}-1\right]\partial x_t;$$

oder $\frac{4}{3}r^3\pi\lambda$ für m gesetzt,

$$2)\ u\partial u_x = \frac{48.g.\gamma}{r\lambda}\left[\frac{na}{a+x}-1\right] \text{ woraus}$$

$$3)\ u^2 = \frac{96g\gamma}{r\lambda}[n\,a\ln(a+x)-x]+C; \text{ also}$$

4) $u^2 = \frac{96g\gamma}{r\lambda}\left[na\ln\frac{a+x}{a} - x\right]$ folgt.

Für $x = A - a$ wird $u = v$, und es ergiebt sich daher die verlangte Formel

5) $v = \sqrt{\frac{96g\gamma}{r\lambda}\left[na\ln\frac{A}{a} - A + a\right]}$.

§. 47. Aufgabe. Denjenigen Werth von a zu bestimmen, für welchen v am größten wird.

Es wird v am größten für denjenigen Werth von a, welcher

$$na\ln\frac{A}{a} + a = z$$

zu einem Maximum macht. Es entsteht aber

$$\partial z_a = 1 - n + n\ln\frac{A}{a} \text{ und } \partial^2 z_a = -\frac{n}{a}$$

und man erhält den verlangten Werth, nehmlich

$$a = \frac{A}{e^{\frac{n-1}{n}}};$$

also, weil n sehr groß ist, nahe $a = \frac{A}{e}$.

§. 48. Aufgabe. Vorausgesetzt, daß ein Rücklauf R des Geschützes auf horizontal gedachtem Terrain statt finde, diesen Rücklauf, und die Anfangsgeschwindigkeit v, womit die Kugel aus dem Rohr tritt, zu bestimmen.

Bezeichnet M die Masse des Geschützes, t die Zeit, in welcher die Kugel vom Beginnen ihrer Bewegung angerechnet, im Rohr den Weg x zurücklegt, u die Endgeschwindigkeit der Kugel, also die während der unendlich kleinen Zeit dt constante, y den gleichzeitigen Theil des Rücklaufes des Geschützes und w die Geschwindigkeit dieser Masse M, während der Zeit dt, und behalten die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in §. 46., so hat sich, wenn die Lage des Rohrs als horizontal angenommen wird, in der Zeit t das Gas aus dem Raum $r^2\pi . a$ in den $r^2\pi(a + x + y)$ verbreitet, und es ist, wenn $g . 32 r^2\pi\gamma$ durch B ausgedrückt wird, am Ende der Zeit t, (wie in §. 46.)

die Beschleunigung G der Kugel $= \frac{B}{m}\left[\frac{na}{a+x+y} - 1\right]$

und die G' des Geschützes $= \frac{B}{M}\left[\frac{na}{a+x+y} - 1\right]$

also, aus den bekannten Gleichungen:

1) $\partial u_t = 2G$;

2) $\partial x_t = u$;

3) $\partial w_t = 2G'$;

4) $\partial y_t = w$;

und zwar aus 1) und 3)

5) $m\partial u_t = M.\partial w_t$ folglich

6) $mu = Mw$; und hieraus und aus 2) und 4)

7) $m\partial x_t = M\partial y_t$; also

8) $mx = My$.

Das Product von 1) und 2) so wie das von 3) und 4) liefert nun noch, wenn für y aus 8) substituirt wird,

9) $u\partial u_x = \frac{2B}{m}\left[\frac{na}{a+\left(1+\frac{m}{M}\right)x} - 1\right]$; und

10) $w\partial w_x = \frac{2Bm}{M^2}\left[\frac{na}{a+\left(1+\frac{m}{M}\right)x} - 1\right]$; woraus nach erfolgter Integration

11) $mu^2 = 4B\left[\frac{naM}{M+m}\ln\left[1+\frac{M+m}{M}.\frac{x}{a}\right] - x\right]$; und

12) $Mw^2 = 4B.\frac{m}{M}\left[\frac{naM}{M+m}\ln\left[1+\frac{M+m}{M}.\frac{x}{a}\right] - x\right]$

entsteht.

Für $x = A - a$; wird $u = v$; und bezeichnet nun W die zugehörige Geschwindigkeit des Geschützes, also die größte, die dasselbe während des Rücklaufes annimmt, so erhält man aus 11) und 12);

13) $v^2 = \frac{4B}{m}\left[\frac{na}{1+\frac{m}{M}} \ln \frac{A+\frac{m}{M}(A-a)}{a} - A+a\right]$; und

14) $W^2 = \frac{4Bm}{M^2}\left[\frac{na}{1+\frac{m}{M}} \ln \frac{A+\frac{m}{M}(A-a)}{a} - A+a\right]$ oder

15) $W = \frac{m}{M} v$ wie aus 6) auch unmittelbar erhellet.

Mit dieſer höchſten erlangten Geſchwindigkeit W, nach Durchlaufung des Wegs $Y = \frac{m}{M}(A-a)$; (aus 8) ſetzt nun das Geſchütz ſeinen Rücklauf fort; und zwar, von nun ab, mit gleichförmig verzögerter Bewegung, inſofern der Reibungswiderſtand, deſſen Gegenwirkung L heißen mag, dieſe Verzögerung bewirkt. Es wird demnach alſo, die Geſchwindigkeit W während Durchlaufung des Wegs $\frac{W^2 M}{4gL}$ vernichtet, und man hat ſomit

$$R = \frac{m}{M}(A-a) + \frac{W^2 M}{4gL}.$$

Aus 13) entſteht die Formel §. 46. 5), wenn man ſich M unendlich groß denkt.

I.

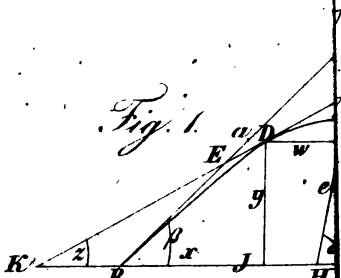


Fig. 1.

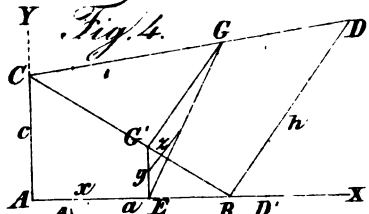
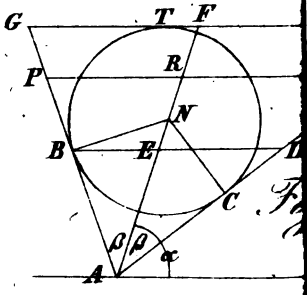


Fig. 4.



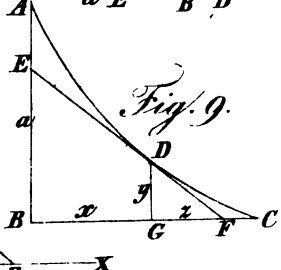
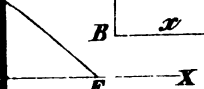
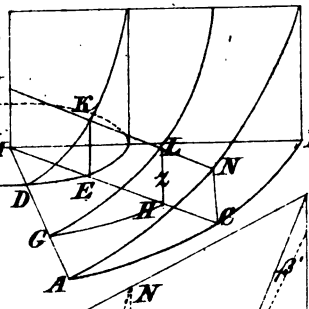


Fig. 9.





10.

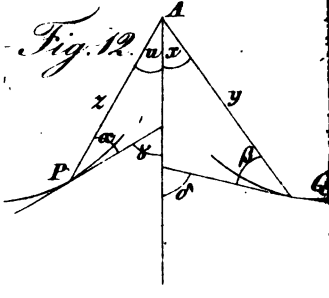


Fig. 12.

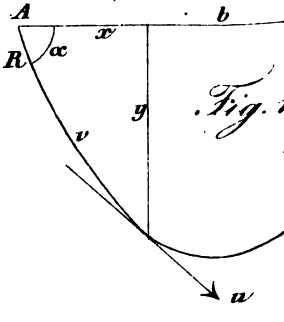


Fig.

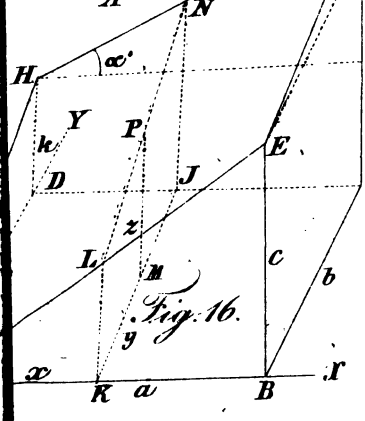


Fig. 16.

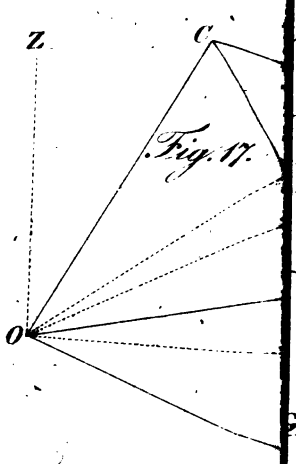


Fig. 17.

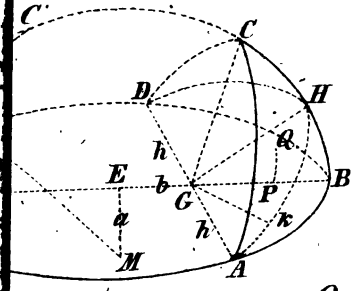


Fig. 20.

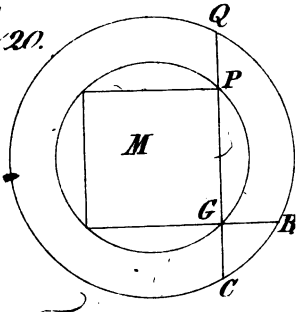
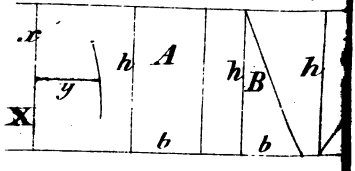


Fig. 22.



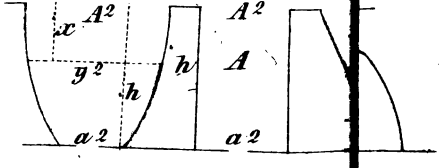


Fig. 23.

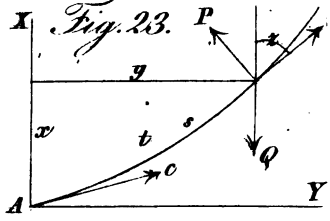
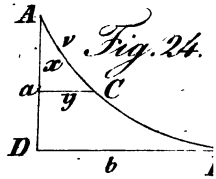


Fig. 24.



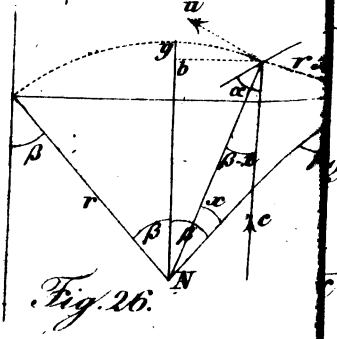


Fig. 26.

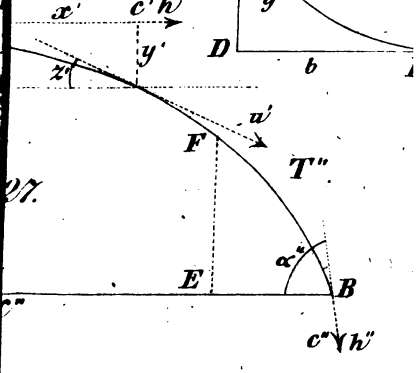



Fig. 27.